Менелай, Паскаль, Брианшон

Обсуждаем вместе

1. **Теорема Менелая.** Точки A_1, B_1 и C_1 лежат на одной прямой тогда и только тогда, когда
$$\frac{\overrightarrow{AC_1}}{\overrightarrow{C_1B}} \cdot \frac{\overrightarrow{BA_1}}{\overrightarrow{A_1C}} \cdot \frac{\overrightarrow{CB_1}}{\overrightarrow{B_1A}} = -1.$$

2. Касательные к описанной окружности неравнобедренного треугольника ABC в точках A, B и C пересекают продолжения сторон в точках A_1, B_1 и C_1. Докажите, что точки A_1, B_1 и C_1 лежат на одной прямой.

3. **Теорема Паскаля.** Дан шестиугольник $AC_1BA_1CB_1$, вписанный в окружность. Докажите, что точки пересечения противоположных сторон лежат на одной прямой.[1]

4. Продолжения сторон AB и CD четырехугольника $ABCD$ пересекаются в точке F, а продолжения BC и AD — в точке E. Докажите, что окружности с диаметрами AC, BD и EF имеют общую радикальную ось, причём на ней лежат ортоцентры треугольников ABE, CDE, ADF, BCF.

5. **(а)** В треугольнике ABC проведены высоты AA_1, BB_1 и CC_1. Прямые AB и A_1B_1, BC и B_1C_1, CA и C_1A_1 пересекаются в точках C', A' и B'. Докажите, что точки A', B' и C' лежат на радикальной оси окружности девяти точек и описанной окружности.
(б) Биссектрисы внешних углов треугольника ABC пересекают продолжения противоположных сторон в точках X, Y и Z. Докажите, что точки X, Y и Z лежат на одной прямой, причем эта прямая перпендикулярна прямой, соединяющей центры вписанной и описанной окружности треугольника ABC.

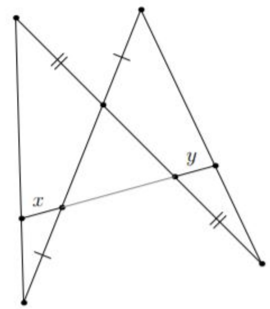
6. **Теорема Брианшона.** Докажите, что диагонали AB, BE и CF описанного шестиугольника $ABCDEF$ пересекаются в одной точке.[2]

[1]**Подсказка.** Рассмотрите треугольник XYZ, где $X = (AB_1) \cap (CA_1)$, $Y = (BC_1) \cap (CA_1)$, $Z = (AB_1) \cap (BC_1)$

[2]**Подсказка.** Стоит рассмотреть три вспомогательные окружности.

Небольшой геометрический разнобой

1. Докажите, что $x = y$.



2. На медиане CD треугольника ABC отмечена точка E. Окружность ω_1, проходящая через точку E и касающаяся прямой AB в точке A, пересекает сторону AC в точке M. Окружность ω_2, проходящая через точку E и касающаяся прямой AB в точке B, пересекает сторону BC в точке N. Докажите, что описанная окружность треугольника CMN касается окружностей ω_1 и ω_2.

3. Дан остроугольный треугольник ABC. Точки M и N — середины сторон AB и BC соответственно, точка H — основание высоты, опущенной из вершины B. Описанные окружности треугольников AHN и CHM пересекаются в точке P ($P \neq H$). Докажите, что прямая PH проходит через середину отрезка MN.

4. В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты BB_1, CC_1. Через A и C_1 проведены две окружности, касающиеся BC в точках P и Q. Докажите, что точки A, B_1, P, Q лежат на одной окружности.

5. Окружность Ω с центром O вписана в угол BAC и касается его сторон в точках B и C. Внутри угла BAC выбрана точка Q. На отрезке AQ нашлась такая точка P, что $AQ \perp OP$. Прямая OP пересекает описанные окружности ω_1 и ω_2 треугольников BPQ и CPQ, вторично в точках M и N. Докажите, что $OM = ON$.

6. **(а)** **(Теорема о двойной бабочке.)** На окружности S отмечены точки A_1, A_2, A_3, A_4, B_1, B_2, B_3, B_4. Прямая ℓ пересекает прямые A_1A_2, A_2A_3, A_3A_4, A_4A_1 в точках X_1, X_2, X_3, X_4 соответственно и прямые B_1B_2, B_2B_3, B_3B_4 в точках X_1, X_2, X_3 соответственно. Докажите, что прямая B_4B_1 проходит через точку X_4.
(б) (**Теорема о бабочке.**) Через точку M, являющуюся серединой хорды PQ некоторой окружности, проведены хорды AB и CD. Хорды AD и BC пересекают отрезок PQ в точках X и Y. При помощи пункта **(а)** докажите, что точка M является серединой отрезка XY.