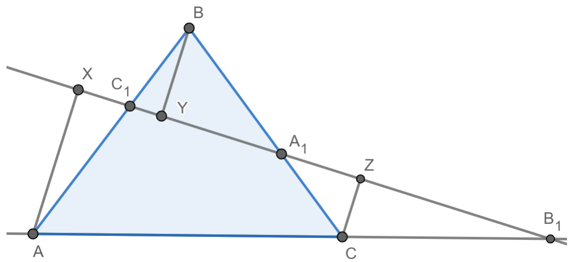
Менелай, Паскаль, Брианшон

Обсуждаем вместе

1. **Теорема Менелая.** Точки A_1, B_1 и C_1 лежат на одной прямой тогда и только тогда, когда

$$\frac{\overrightarrow{AC_1}}{\overrightarrow{C_1B}} \cdot \frac{\overrightarrow{BA_1}}{\overrightarrow{A_1C}} \cdot \frac{\overrightarrow{CB_1}}{\overrightarrow{B_1A}} = -1.$$

Доказательство. Опустим перпендикуляры AX, BY, CZ на прямую $C_1A_1B_1$.

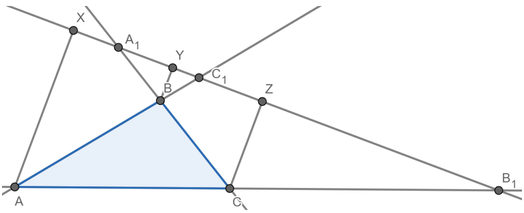


Образовалось три пары подобных прямоугольных треугольников:

- $\triangle AXC_1$ и $\triangle BYC_1$;
- $\triangle BYA_1$ и $\triangle CZA_1$;
- $\triangle CZB_1$ и $\triangle AXB_1$.

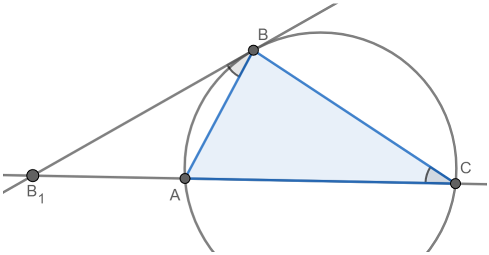
Расписав из подобие, можно получить соотношение Менелая. В обратную сторону теорема доказывается от противного.

Также есть второй вариант расположения точек. В нём рассуждения абсолютно аналогичны.



2. Касательные к описанной окружности неравнобедренного треугольника ABC в точках A, B и C пересекают продолжения сторон в точках A_1, B_1 и C_1. Докажите, что точки A_1, B_1 и C_1 лежат на одной прямой.

Доказательство. Рассмотрим одну касательную — BB_1.



На чертеже видны два подобных треугольника: $\triangle B_1AB$ и $\triangle B_1BC$. Из подобия следует два равенства

$$\frac{B_1B}{B_1C} = \frac{AB}{BC} \quad \text{и} \quad \frac{B_1A}{B_1B} = \frac{AB}{BC}.$$

Перемножим их и получим, что

$$\frac{B_1A}{B_1C} = \frac{B_1B}{B_1C} \cdot \frac{B_1A}{B_1B} = \frac{AB^2}{BC^2}.$$

Расписав аналогичные равенства для двух других касательных и применив теорему Менелая, мы докажем нужное утверждение.

3. **Теорема Паскаля.** Дан шестиугольник $ABCDEF$, вписанный в окружность. Докажите, что точки пересечения противоположных сторон лежат на одной прямой.

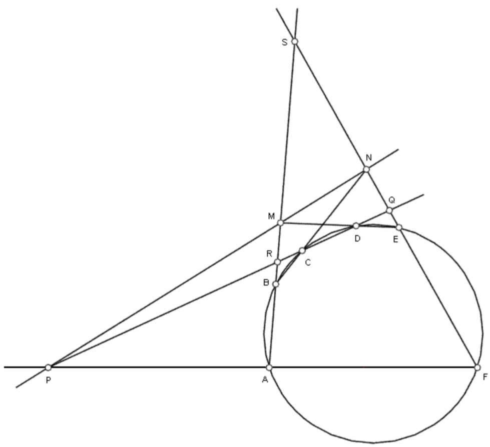
Доказательство.

Обозначим точки пересечения прямых, на которых лежат противоположные стороны шестиугольника, следующим образом:

$$M = (AB) \cap (DE), \quad N = (BC) \cap (EF), \quad P = (CD) \cap (AF).$$

Также обозначим следующие точки:

$$Q = (EF) \cap (CD), R = AB \cap (CD), S = (EF) \cap (AB).$$



По свойству секущих к окружности

$$QE \cdot QF = QD \cdot QC,$$

$$RC \cdot RD = RB \cdot RA,$$

$$SE \cdot SF = SB \cdot SA.$$

Рассмотрим треугольник QRS. Применим теорему Менелая к этому треугольнику и прямой AF:

$$\frac{SA}{AR} \cdot \frac{PR}{PQ} \cdot \frac{QF}{FS} = 1.$$

По теореме Менелая для треугольника QRS и прямых ED и BC получим

$$\frac{QE}{ES} \cdot \frac{SM}{MR} \cdot \frac{RD}{DQ} = 1,$$

$$\frac{RC}{CQ} \cdot \frac{QN}{NS} \cdot \frac{SB}{BR} = 1.$$

Теперь перемножим последние три равенства:

$$\left(\frac{SA}{AR} \cdot \frac{PR}{PQ} \cdot \frac{QF}{FS}\right) \cdot \left(\frac{QE}{ES} \cdot \frac{SM}{MR} \cdot \frac{RD}{DQ}\right) \cdot \left(\frac{RC}{CQ} \cdot \frac{QN}{NS} \cdot \frac{SB}{BR}\right) = 1.$$

$QF \cdot QE$ в числителе сократится с $DQ \cdot CQ$ в знаменателе, $RC \cdot RD$ в числителе сократится с $AR \cdot BR$ в знаменателе, $SA \cdot SB$ в числителе сократится с $FS \cdot ES$ в знаменателе.

Тогда

$$\frac{RP}{PQ} \cdot \frac{SM}{MR} \cdot \frac{QN}{NS} = 1.$$

А это равенство по теореме, обратной к теореме Менелая, примененной к треугольнику QRS и точкам M, N, P, лежащим на продолжениях его сторон, означает, что точки M, N, P лежат на одной прямой.

Замечание. Если всё тоже самое расписать для векторной формы теоремы Менелая (как мы доказывали выше), то доказательство будет верно для замкнутой шестизвенной ломанной, вписанной в окружность, а не только для выпуклого шестиугольника. Разумеется, для некоторых шестиугольников противоположные стороны могут оказаться параллельными, тогда доказательство, приведенное выше, следует изменить.

4. Продолжения сторон AB и CD четырехугольника $ABCD$ пересекаются в точке F, а продолжения BC и AD — в точке E. Докажите, что окружности с диаметрами AC, BD и EF имеют общую радикальную ось, причём на ней лежат ортоцентры треугольников ABE, CDE, ADF, BCF.

Доказательство.

Проведем в треугольнике CDE высоты CC_1 и DD_1; пусть H — точка их пересечения. Окружности с диаметрами AC и BD проходят через точки C_1 и D_1 соответственно, поэтому степень точки H относительно каждой из этих окружностей равна ее степени относительно окружности с диаметром CD (эта окружность проходит через точки C_1 и D_1). Аналогично доказывается, что степени точки H относительно окружностей с диаметрами AC, BD и EF равны, т. е. радикальные оси этих окружностей проходят через точку H. Для точек пересечения высот остальных трех треугольников доказательство проводится аналогично.

5. **(а)** В треугольнике ABC проведены высоты AA_1, BB_1 и CC_1. Прямые AB и A_1B_1, BC и B_1C_1, CA и C_1A_1 пересекаются в точках C', A' и B'. Докажите, что точки A', B' и C' лежат на радикальной оси окружности девяти точек и описанной окружности.
(б) Биссектрисы внешних углов треугольника ABC пересекают продолжения противоположных сторон в точках X, Y и Z. Докажите, что точки X, Y и Z лежат на одной прямой, причем эта прямая перпендикулярна прямой, соединяющей центры вписанной и описанной окружности треугольника ABC.

Доказательство.

а) Точки B_1 и C_1 лежат на окружности с диаметром BC, поэтому степени точки A' относительно описанных окружностей треугольников $A_1B_1C_1$ и ABC равны степени точки A' относительно этой окружности. Значит, точка A' лежит на радикальной оси окружности Эйлера и описанной окружности треугольника ABC. Для точек B' и C' доказательство аналогично.

б) Рассмотрим треугольник $A_1B_1C_1$, образованный внешними биссектрисами треугольника ABC (треугольник $A_1B_1C_1$ остроугольный). Согласно задаче а) точки A', B' и C' лежат на радикальной оси описанных окружностей треугольников ABC и $A_1B_1C_1$. Радикальная ось этих окружностей перпендикулярна прямой, соединяющей их центры, т. е. прямой Эйлера треугольника $A_1B_1C_1$. Остается заметить, что точка пересечения высот треугольника $A_1B_1C_1$ является точкой пересечения биссектрис треугольника ABC

6. **Теорема Брианшона.** Докажите, что диагонали AD, BE и CF описанного шестиугольника $ABCDEF$ пересекаются в одной точке.

Доказательство.

Пусть выпуклый шестиугольник $ABCDEF$ касается окружности в точках R, Q, T, S, P, U (точка R лежит на AB, Q — на BC и т. д.).

Выберем произвольное число $a > 0$ и построим на прямых BC и EF точки Q' и P' так, что $QQ' = PP' = a$, а векторы $\overrightarrow{QQ'}$ и $\overrightarrow{PP'}$ сонаправлены с векторами $\overrightarrow{CB}$ и $\overrightarrow{EF}$. Аналогично строим точки R', S', T', U' (рис. 3.19; $RR' = SS' = TT' = UU' = a$). Построим окружность S_1, касающуюся прямых BC и EF в точках Q' и P'. Аналогично построим окружности S_2 и S_3.

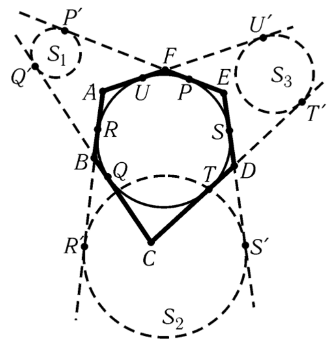


Рис. 3.19

Докажем, что точки B и E лежат на радикальной оси окружностей S_1 и S_2. $BQ' = QQ' - BQ = RR' - BR = BR'$ (если $QQ' < BQ$, то $BQ' = BQ - QQ' = BR - RR' = BR'$) и $EP' = EP + PP' = ES + SS' = ES'$. Аналогично доказывается, что прямые FC и AD являются радикальными осями окружностей S_1 и S_3, S_2 и S_3 соответственно. Так как радикальные оси трех окружностей пересекаются в одной точке, прямые AD, BE и CF пересекаются в одной точке.