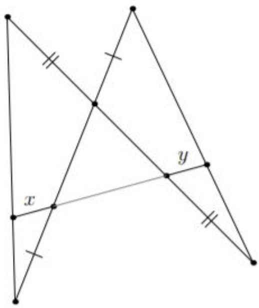
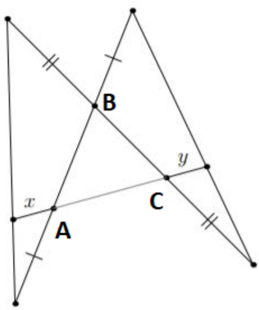
Менелай, Паскаль, Брианшон

Небольшой геометрический разнобой

1. Докажите, что $x = y$.



Решение.

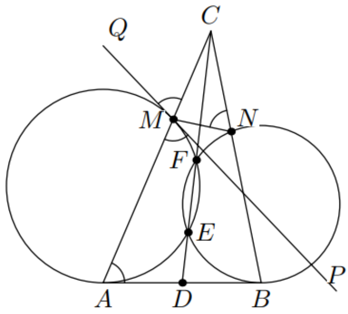


Для решения задачи достаточка написать две теоремы Менелая:

- для треугольника ABC и левой прямой;
- для треугольника ABC и правой прямой.

2. На медиане CD треугольника ABC отмечена точка E. Окружность ω_1, проходящая через точку E и касающаяся прямой AB в точке A, пересекает сторону AC в точке M. Окружность ω_2, проходящая через точку E и касающаяся прямой AB в точке B, пересекает сторону BC в точке N. Докажите, что описанная окружность треугольника CMN касается окружностей ω_1 и ω_2.

Решение.

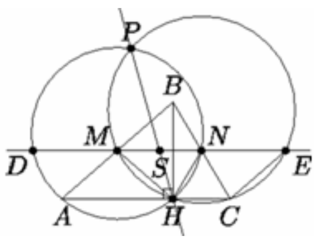


Пусть окружность S_1 вторично пересекает CD в точке F. Будем считать для определенности, что E лежит между D и F (возможно, $F = E$). Из равенства $DA^2 = DF \cdot DE$ следует $DB^2 = DF \cdot DE$, а, значит, и окружность S_2 проходит через точку F.

Теперь, поскольку $CA \cdot CM = CE \cdot CF = CB \cdot CN$, получаем $\dfrac{CM}{CN} = \dfrac{CB}{CA}$, откуда $\triangle CMN \sim \triangle CBA$, $\angle CMN = \angle CBA$, $\angle CNM = \angle CAB$. Проведем касательную к S_1 в точке M и отметим на ней две точки P и Q так, чтобы P оказалось по одну сторону с B от прямой AC, а Q — по другую. Очевидно, $\angle PMA = \angle BAM$. Но тогда $\angle QMC = \angle PMA = \angle CAB = \angle CNM$, а это означает, что окружность, проходящая через C и M и касающаяся S_1, проходит и через N. Аналогично показывается, что окружность, проходящая через C и N и касающаяся S_2, проходит и через M.

3. Дан остроугольный треугольник ABC. Точки M и N — середины сторон AB и BC соответственно, точка H — основание высоты, опущенной из вершины B. Описанные окружности треугольников AHN и CHM пересекаются в точке P ($P \neq H$). Докажите, что прямая PH проходит через середину отрезка MN.

Решение.



Пусть прямая MN вторично пересекает описанные окружности Ω_1 и Ω_2 треугольников AHN и CHM в точках D и E, а прямую PH — в точке S. Поскольку HN — медиана прямоугольного треугольника BHC, то $HN = CN$ и $\angle NHC = \angle NCH$. Из параллельности хорд ME и HC окружности Ω_2 следует, что четырёхугольник $MHCE$ — равнобокая трапеция, поэтому $HM = CE$ и $\angle MHC = \angle ECH$. Следовательно,

$$\angle MHN = \angle MHC - \angle NHC = \angle ECH - \angle NCH = \angle ECN.$$

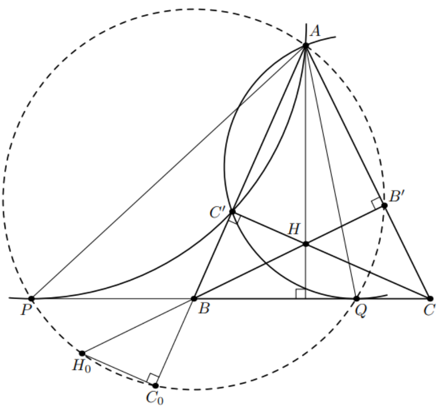
Значит, треугольники MHN и ECN равны по двум сторонам и углу между ними, откуда $NE = MN$. Аналогично $DM = MN$. Обозначим длину этих трёх отрезков через a, а длины отрезков MS и NS через x и y. Из вписанности четырёхугольников $DHNP$ и $MHEP$ получаем $MS \cdot SE = PS \cdot SH = NS \cdot SD$, то есть $x(a + y) = y(a + x)$, или $ax = ay$. Таким образом, S — середина MN, что и требовалось.

4. В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты BB_1, CC_1. Через A и C_1 проведены две окружности, касающиеся BC в точках P и Q. Докажите, что точки A, B_1, P, Q лежат на одной окружности.

Решение.

Первое решение. Так как $BP^2 = BQ^2 = BA \cdot BC'$, а четырехугольники $AC'A'C$ и $AB'A'B$ (AA' — третья высота) вписанные, получаем, что $CP \cdot CQ = CB^2 - BP^2 = CB^2 - BA \cdot BC' = BC^2 - BC \cdot BA' = BC \cdot CA' = CA \cdot CB'$. Это, очевидно, равносильно утверждению задачи.

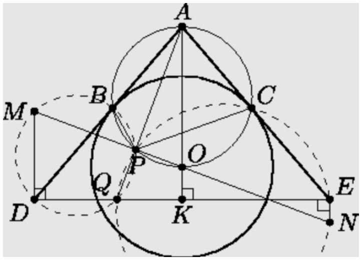
Второе решение. Пусть C_0 симметрична C' относительно B. Тогда $BC_0 \cdot BA = BC' \cdot BA = BP^2 = BP \cdot BQ$, то есть точки A, P, C_0, Q лежат на одной окружности ω. Пусть H_0 — точка этой окружности, диаметрально противоположная A. Тогда $H_0C_0 \perp BC$. Тогда точка, симметричная H_0 относительно B (т.е. середины PQ), лежит на высоте CC'; кроме того, она лежит на высоте AA' треугольника APQ. Значит, точка H_0 симметрична ортоцентру H треугольника ABC относительно B. Значит, $BH_0 \cdot BB' = BH \cdot BB' = BC' \cdot BA = BC_0 \cdot BA$, что и означает, что B' также лежит на ω (рис.10.5).



Замечание. По сути, мы воспользовались тем известным фактом, что C' — проекция ортоцентра треугольника APQ на его медиану AB. Отсюда следует, что треугольники ABC и APQ имеют общий ортоцентр H.

5. Окружность Ω с центром O вписана в угол BAC и касается его сторон в точках B и C. Внутри угла BAC выбрана точка Q. На отрезке AQ нашлась такая точка P, что $AQ \perp OP$. Прямая OP пересекает описанные окружности ω_1 и ω_2 треугольников BPQ и CPQ, вторично в точках M и N. Докажите, что $OM = ON$.

Решение.



Пусть окружности ω_1 и ω_2 пересекают лучи AB и AC в точках D и E соответственно. По теореме о произведении отрезков секущих $AB \cdot AD = AP \cdot AQ = AC \cdot AE$. Так как $AB = AC$, то $AD = AE$. Пусть K — середина DE. Тогда прямая AK является медианой, высотой и биссектрисой равнобедренного треугольника ADE, в частности, AK проходит через O.

Точки A, B, C, P, O лежат на окружности с диаметром AO. Из вписанных четырёхугольников $ABPC, BPQD, CPQE$:

$$\angle PQD = 180° - \angle PBD = \angle ABP = 180° - \angle ACP = \angle PCE = 180° - \angle PQE,$$

поэтому точка Q лежит на отрезке DE. Так как четырёхугольник $PQDM$ вписанный, то $\angle MDQ = \angle MPQ = 90°$, отсюда $MD \perp DE$. Аналогично $NE \perp DE$. Таким образом, $MD \parallel OK \parallel NE$ и $DK = KE$. Следовательно, $OM = ON$.

6. **(а)** **(Теорема о двойной бабочке.)** На окружности S отмечены точки A_1, A_2, A_3, A_4, B_1, B_2, B_3, B_4. Прямая ℓ пересекает прямые A_1A_2, A_2A_3, A_3A_4, A_4A_1 в точках X_1, X_2, X_3, X_4 соответственно и прямые B_1B_2, B_2B_3, B_3B_4 в точках X_1, X_2, X_3 соответственно. Докажите, что прямая B_4B_1 проходит через точку X_4.

(б) (**Теорема о бабочке.**) Через точку M, являющуюся серединой хорды PQ некоторой окружности, проведены хорды AB и CD. Хорды AD и BC пересекают отрезок PQ в точках X и Y. При помощи пункта **(а)** докажите, что точка M является серединой отрезка XY.