Вспоминаем геометрию

Блок имени Чевы, Менелая, Паскаля

Теорема Чевы. Прямые AA_1, BB_1 и CC_1 конкурентны тогда и только тогда, когда

$$\frac{\overrightarrow{AC_1}}{\overrightarrow{C_1B}} \cdot \frac{\overrightarrow{BA_1}}{\overrightarrow{A_1C}} \cdot \frac{\overrightarrow{CB_1}}{\overrightarrow{B_1A}} = 1.$$

Теорема Менелая. Точки A_1, B_1 и C_1 лежат на одной прямой тогда и только тогда, когда

$$\frac{\overrightarrow{AC_1}}{\overrightarrow{C_1B}} \cdot \frac{\overrightarrow{BA_1}}{\overrightarrow{A_1C}} \cdot \frac{\overrightarrow{CB_1}}{\overrightarrow{B_1A}} = -1.$$

1. Пусть P — произвольная точка на высоте AA_1 остроугольного треугольника ABC. Прямые BP и CP пересекают стороны AC и AB в точках B_1 и C_1 соответственно. Докажите, что $\angle B_1A_1P = \angle C_1A_1P$.

2. Пусть BB_0 — биссектриса треугольника ABC. Пусть вписанная в треугольник ABB_0 окружность касается прямых AB, BB_0 и AC в точках C_1, A_1 и B_1 соответственно. Пусть также вневписанная в треугольник CBB_0 окружность (соответствующая вершине B) касается прямых CB, BB_0 и AC в точках A_2, C_2 и B_2 соответственно. Докажите, что точки C_1, B_1, C_2 лежат на одной прямой и точки A_1, B_2, A_2 лежат на одной прямой.

3. **Теорема Паскаля.** Дан шестиугольник $AC_1BA_1CB_1$, вписанный в окружность. Докажите, что точки пересечения противоположных сторон лежат на одной прямой.[1]

Радикальный блок имени Брианшона

4. Продолжения сторон AB и CD четырехугольника $ABCD$ пересекаются в точке F, а продолжения BC и AD — в точке E. Докажите, что окружности с диаметрами AC, BD и EF имеют общую радикальную ось, причём на ней лежат ортоцентры треугольников ABE, CDE, ADF, BCF.

5. **(а)** В треугольнике ABC проведены высоты AA_1, BB_1 и CC_1. Прямые AB и A_1B_1, BC и B_1C_1, CA и C_1A_1 пересекаются в точках C', A' и B'. Докажите, что точки A', B' и C' лежат на радикальной оси окружности девяти точек и описанной окружности.
(б) Биссектрисы внешних углов треугольника ABC пересекают продолжения противоположных сторон в точках X, Y и Z. Докажите, что точки X, Y и Z лежат на одной прямой, причем эта прямая перпендикулярна прямой, соединяющей центры вписанной и описанной окружности треугольника ABC.

[1] **Подсказка.** Рассмотрите треугольник XYZ, где $X = (AB_1)\cap(CA_1)$, $Y = (BC_1)\cap(CA_1)$, $Z = (AB_1)\cap(BC_1)$

6. **Теорема Брианшона.** Докажите, что диагонали AB, BE и CF описанного шестиугольника $ABCDEF$ пересекаются в одной точке.[2]

Блок про бабочку и про разное

7. На окружности даны 5 точек U, V, A, B, C. Прямые UA и VB пересекаются в точке M, прямые UB и VA — в точке M_1, прямые UB и VC — в точке N, прямые UC и VB — в точке N_1, прямые UC и VA — в точке P и прямые UA и VC — в точке P_1. Докажите, что прямые MM_1, NN_1 и PP_1 пересекаются в одной точке или параллельны.

8. **(а)** **(Теорема о двойной бабочке.)** На окружности S отмечены точки A_1, A_2, A_3, A_4, B_1, B_2, B_3, B_4. Прямая ℓ пересекает прямые A_1A_2, A_2A_3, A_3A_4, A_4A_1 в точках X_1, X_2, X_3, X_4 соответственно и прямые B_1B_2, B_2B_3, B_3B_4 в точках X_1, X_2, X_3 соответственно. Докажите, что прямая B_4B_1 проходит через точку X_4.
(б) (**Теорема о бабочке.**) Через точку M, являющуюся серединой хорды PQ некоторой окружности, проведены хорды AB и CD. Хорды AD и BC пересекают отрезок PQ в точках X и Y. При помощи пункта **(а)** докажите, что точка M является серединой отрезка XY.

9. Про выпуклый шестиугольник $ABCDEF$ известно, что $AB \parallel DE$, $BC \parallel EF$, $CD \parallel FA$.

   M, N, K — точки пересечения прямых BD и AE, AC и DF, CE и BF соответственно. Докажите, что перпендикуляры, опущенные из точек M, N, K к прямым AB, CD, EF соответственно, конкурентны.

[2] **Подсказка.** Стоит рассмотреть три вспомогательные окружности.