Вспоминаем многочлены

1. Существует ли многочлен $P(x)$, такой, что $P(1) = 1, P(2) = 2$ и $P(n)$ иррационально для любого целого n, отличного от 1 и 2?

2. Многочлен $P(x)$ с целыми коэффициентами имеет 100 различных целых корней. Многочлен $Q(x)$ степени не ниже первой с целыми коэффициентами — делитель $P(x) + 2021$. Докажите, что степень $Q(x)$ не меньше 13.

3. Для различных целых x, y, z и натурального n докажите, что
$$\frac{x^n}{(x-y)(x-z)} + \frac{y^n}{(y-x)(y-z)} + \frac{z^n}{(z-x)(z-y)}$$
есть целое число.

4. Барон Мюнхгаузен попросил задумать непостоянный многочлен $P(x)$ с целыми неотрицательными коэффициентами и сообщить ему только значения $P(2)$ и $P(P(2))$. Барон утверждает, что он только по этим данным всегда может восстановить задуманный многочлен. Не ошибается ли барон?

5. Докажите, что если некоторый многочлен с целыми коэффициентами принимает в k целых точках значения среди чисел от 1 до $k-1$, то при $k \geqslant 6$ эти значения равны.

6. Пусть целочисленный многочлен $P(x)$ таков, что $deg\,P = 990$, $P(k) = F_k$ для $k = 992, \ldots, 1982$, где $F_0 = 1, F_1 = 1, F_2 = 2, \ldots$ — числа Фибоначчи. Докажите, что $P(1983) = F_{1983} - 1$.

7. Дана функция $f(x)$, значение которой при любом целом x целое. Известно, что для любого простого числа p существует такой многочлен $Q_p(x)$ степени, не превышающей 2021, с целыми коэффициентами, что $f(n) - Q_p(n)$ делится на p при любом целом n. Верно ли, что существует такой многочлен $g(x)$ с вещественными коэффициентами , что $g(n) = f(n)$ для любого целого n?

8. Учитель собирается дать детям задачу следующего вида. Он сообщит им, что он задумал многочлен $P(x)$ степени 2021 с целыми коэффициентами, старший коэффициент которого равен 1. Затем он сообщит им k целых чисел $n_1, n_2, \ldots, n_k$ и отдельно сообщит значение выражения $P(n_1)P(n_2)\ldots P(n_k)$. По этим данным дети должны найти многочлен, который мог бы задумать учитель. При каком наименьшем k учитель сможет составить задачу такого вида так, чтобы многочлен, найденный детьми, обязательно совпал бы с задуманным?

9. Найдите все такие многочлены с целыми коэффициентами $P(x)$, что для любых действительных чисел s, t если $P(s)$ и $P(t)$ оба целые, то и $P(st)$ тоже целое.