

Вспоминаем многочлены

1. Существует ли многочлен $P(x)$, такой, что $P(1) = 1, P(2) = 2$ и $P(n)$ иррационально для любого целого n , отличного от 1 и 2?
2. Два корабля движутся с постоянными скоростями. Расстояния между ними, измеренные в 12, 14 и 15 часов равнялись 5, 7 и 12 километра соответственно. Каким было расстояние между кораблями в 13 часов?
3. $P(x)$ — многочлен с целыми коэффициентами. Уравнения $P(x) = 1, P(x) = 2, P(x) = 3$ имеют целые корни. Докажите, что уравнение $P(x) = 5$ не может иметь два или более целых корня.
4. Даны два различных приведённых кубических многочлена $F(x)$ и $G(x)$. Выписали все корни уравнений $F(x) = 0, G(x) = 0, F(x) = G(x)$. Оказалось, что выписаны 8 различных чисел. Докажите, что наибольшее и наименьшее из них не могут одновременно являться корнями многочлена $F(x)$.
5. Многочлен $P(x)$ с целыми коэффициентами имеет 100 различных целых корней. Многочлен $Q(x)$ степени не ниже первой с целыми коэффициентами — делитель $P(x) + 2021$. Докажите, что степень $Q(x)$ не меньше 13.
6. Пусть $P(x)$ — многочлен с целыми коэффициентами. Обозначим через $n(P)$ количество целых решений уравнения $(P(x))^2 = 1$. Докажите, что $n(P) \leq \deg P + 2$.
7. Существует ли многочлен $P(x)$ 2021-й степени такой, что $P(x^2 - 1)$ делится на $P(x)$?
8. Для различных целых x, y, z и натурального n докажите, что

$$\frac{x^n}{(x-y)(x-z)} + \frac{y^n}{(y-x)(y-z)} + \frac{z^n}{(z-x)(z-y)}$$

есть целое число.