Вспоминаем многочлены

1. Существует ли многочлен $P(x)$, такой, что $P(1) = 1, P(2) = 2$ и $P(n)$ иррационально для любого целого n, отличного от 1 и 2?

Решение. Да, существует, например $\sqrt{2}(x-1)(x-2)+x$.

2. Два корабля двигаются с постоянными скоростями. Расстояния между ними, измеренные в 12, 14 и 15 часов равнялись 5, 7 и 12 километра соответственно. Каким было расстояние между кораблями в 13 часов?

Решение. Пусть $S(t)$ это расстояние между кораблями в момент времени t. Если записать формулу для $S(t)$ в координатах, то мы получим, что $S^2(t)$ это многочлен от t не более чем второй степени. Также мы знаем значения этого многочлена в трёх точках, а значит мы можем применить интерполционную формулу Лагранжа, и получим, что:

$$S^2(t) = 12\frac{(t-12)(t-14)}{(15-12)(15-14)} + 7\frac{(t-12)(t-15)}{(14-12)(14-15)} + 5\frac{(t-14)(t-15)}{(12-14)(12-15)}.$$

Подставляя в эту формулу $t = 13$ получаем требуемое.

3. $P(x)$ — многочлен с целыми коэффициентами. Уравнения $P(x) = 1, P(x) = 2, P(x) = 3$ имеют целые корни. Докажите, что уравнение $P(x) = 5$ не может иметь два или более целых корня.

Решение. Вспоминаем известную целочисленную теорему Безу: если у нас есть многочлен $P(x)$ с целыми коэффициентами и два целых a и b, то $P(a)-P(b) \;\vdots\; (a-b)$.

Пусть $P(a) = 1, P(b) = 2, P(c) = 3$. Тогда

$$1 = P(b) - P(a) \;\vdots\; b - a,$$

$$1 = P(c) - P(b) \;\vdots\; c - b,$$

что значит, что числа a, b отличаются на 1 и числа b, c отличаются на 1, значит a, b, c это три последовательных числа, при чём либо $a = x, b = x + 1, c = x + 2$, либо в обратном порядке.

Разберём только первый случай, второй разбирается аналогично. Пусть есть такое y, что $P(y) = 5$. Тогда

$$2 = P(y) - P(c) \;\vdots\; y - c,$$

значит $y - c = \pm 2$, либо $y - c = \pm 1$, но так как $y \neq a, b$, то $y = x + 3$ или $y = x + 4$. Но если $y = x + 3$, то $-3 = P(x+1) - P(x+3) \;\vdots\; 2$, противоречие. Значит y может быть равным только одному числу.

4. Даны два различных приведённых кубических многочлена $F(x)$ и $G(x)$. Выписали все корни уравнений $F(x) = 0$, $G(x) = 0$, $F(x) = G(x)$. Оказалось, что выписаны 8 различных чисел. Докажите, что наибольшее и наименьшее из них не могут одновременно являться корнями многочлена $F(x)$.

Решение. Так как $F(x)$ и $G(x)$ приведённые, то $F(x)-G(x)$ имеет степень не больше двух. А так как у них в совокупности 8 корней, то $F(x), G(x)$ имеют ровно 3 различных корня, а $F(x) - G(x)$ ровно 2 различных корня.

Тогда пусть

$$F(x) = (x - a_1)(x - a_2)(x - a_3),$$
$$G(x) = (x - b_1)(x - b_2)(x - b_3),$$
$$F(x) - G(x) = d(x - c_1)(x - c_2).$$

Пусть a_1 это максимальных из всех корней, а a_2 минимальный. Тогда рассмотрим равенство:

$$(x - a_1)(x - a_2)(x - a_3) - (x - b_1)(x - b_2)(x - b_3) = d(x - c_1)(x - c_2)$$

Подставим в него $x = a_1$:

$$-(a_1 - b_1)(a_1 - b_2)(a_1 - b_3) = d(a_1 - c_1)(a_1 - c_2)$$

Так как a_1 максимально, то слева стоит отрицательное число. Значит d тоже отрицательно. Теперь подставим $x = a_2$:

$$-(a_2 - b_1)(a_2 - b_2)(a_2 - b_3) = d(a_2 - c_1)(a_2 - c_2)$$

Так как a_2 минимально, то слева произведение 4 отрицательных чисел, то есть положительное. Значит d тоже положительно. Противоречие.

5. Многочлен $P(x)$ с целыми коэффициентами имеет 100 различных целых корней. Многочлен $Q(x)$ степени не ниже первой с целыми коэффициентами — делитель $P(x) + 2021$. Докажите, что степень $Q(x)$ не меньше 13.

Решение. Пусть $a_1, a_2, \dots a_{100}$ — корни $P(x)$. Пусть $P(x) + 2021 = Q(x)R(x)$.

Тогда для $1 \leqslant i \leqslant 100$ имеем $2021 = Q(a_i)R(a_i)$.

Так как $2021 = 43 \cdot 47$, то $Q(a_i) \in \{\pm 1, \pm 43, \pm 47, \pm 2021\}$.

Но тогда какое-то из этих значений $Q(x)$ принимает хотя бы $\frac{100}{8} = 12{,}5$ раз. Значит он принимает одно и тоже значение хотя бы 13 раз, значит его степень хотя бы 13.

6. Пусть $P(x)$ — многочлен с целыми коэффициентами. Обозначим через $n(P)$ количество целых решений уравнения $(P(x))^2 = 1$. Докажите, что $n(P) \leqslant deg\,P + 2$.

Решение. Понятно, что $n(P)$ это сумма числа решений уравнений $P(x) = 1$ и $P(x) = -1$.

Каждое из этих уравнений,очевидно, имеет не более, чем $deg\,P$ решений. Значит у каждого из них должно быть хотя бы по 3 решения, иначе победа.

Пусть $P(a_1) = P(a_2) = P(a_3) = 1$. Тогда заметим, что

$$P(x) - 1 = (x - a_1)(x - a_2)(x - a_3)Q(x).$$

Тогда пусть $P(b) = -1$. Подставим b в наше равенство:

$$-2 = P(b) - 1 = (b - a_1)(b - a_2)(b - a_3)Q(b).$$

Понятно, что $b-a_1, b-a_2, b-a_3$ это три различных числа, каждое из которых равно $\pm 1, \pm 2$, причём и 2 и -2 одновременно там быть не могут. Значит эти числа либо $-1, 1, 2$, либо $-1, 1, -2$, причём для каждого такого набора мы однозначно восстановим b. Значит у b не более двух различных значений, а должно быть хотя бы 3, противоречие.

7. Существует ли многочлен $P(x)$ 2021-й степени такой, что $P(x^2 - 1)$ делится на $P(x)$?

Решение. Да, существует. Возьмём такое a, что $a^2 - a - 1 = 0$ (легко видеть, что такое a существует). Тогда $P(x) = (x - a)^{2021}$ подходит, так как $x^2 - 1 - a$ имеет корень a, значит $(x^2 - 1 - a)^{2021}$ делится на $(x - a)^{2021}$.

8. Для различных целых x, y, z и натурального n докажите, что

$$\frac{x^n}{(x-y)(x-z)} + \frac{y^n}{(y-x)(y-z)} + \frac{z^n}{(z-x)(z-y)}$$

есть целое число.

Решение. Обозначим число из условия за A. Давайте разделим многочлен t^n на $(t-x)(t-y)(t-z)$ с остатком. Мы получим, что

$$t^n = (t-x)(t-y)(t-z)Q(t) + R(t).$$

Заметим, что $R(t)$ имеет целые коэффициенты и в точках x, y, z равен x^n, y^n, z^n соответственно. Тогда по интерполяционному многочлену Лагранжа мы имеем, что:

$$R(t) = z^n \frac{(t-x)(t-y)}{(z-x)(z-y)} + x^n \frac{(t-y)(t-z)}{(x-y)(x-z)} + y^n \frac{(t-x)(t-z)}{(y-x)(y-z)}$$

Но заметим, что тогда старший коэффициенты $R(t)$ это и есть A, а так как у $R(t)$ целые коэффициенты, то A – целое, что и требовалось.