

Диагностическая работа, 2 этап

1. При каких n существует выпуклый n -угольник, который можно разрезать на несколько правильных треугольников?
2. Петя и Витя ехали вниз по эскалатору. Посередине эскалатора хулиган Витя сорвал с Пети шапку и бросил её на встречный эскалатор. Пострадавший Петя побежал обратно вверх по эскалатору, чтобы затем спуститься вниз и вернуть шапку. Хитрый Витя побежал по эскалатору вниз, чтобы затем подняться вверх и успеть раньше Пети. Кто успеет раньше, если скорости ребят относительно эскалатора постоянны и не зависят от направления движения?
3. В однокруговом турнире на 100 команд в некоторый момент оказалось, что любые четыре команды можно разбить на две пары так, что команды в одной паре уже сыграли между собой. Какое наименьшее количество матчей могло быть сыграно в турнире на данный момент?
4. Две окружности пересекаются в точках A и B , прямая, проходящая через B пересекает первую окружность в точке C , а вторую — в точке D . Касательные к первой и второй окружности в точках C и D соответственно пересекаются в точке M . Прямая, проходящая через точку пересечения AM и CD параллельно CM пересекает AC в точке K . Докажите, что BK касается второй окружности.
5. Найдите все такие натуральные m , n и простые p , что число $\frac{7^n + p \cdot 2^m}{7^n - p \cdot 2^m}$ — тоже натуральное.
6. Федя и Петя договорились показать Маше фокус. У них есть колода из 100 карт, пронумерованных числами $1, 2, \dots, 100$. Обратные стороны всех карт неразличимы. Маша раскладывает карты в произвольном порядке числом вверх. Петя, посмотрев на них, либо меняет две карты местами, либо не делает ничего. Затем карты (с сохранением порядка) переворачиваются числом вниз, и в комнату входит Федя. Маша называет ему число от 1 до 100, и он по одной переворачивает карты с целью перевернуть карту со сказанным числом. Могут ли Федя и Петя договориться так, чтобы Федя гарантированно нашёл карточку не более, чем за 50 переворачиваний?