Диагностическая работа

1. При каких n существует выпуклый n-угольник, который можно разрезать на несколько правильных треугольников?

Решение. Если n-угольник можно разрезать на правильные треугольники, то все его углы равны либо 60°, либо 120°. Пусть углов по 60° — x, тогда углов по 120° — $n - x$. Запишем сумму углов n-угольника

$$60x + 120(n - x) = 180(n - 2),$$

$$x + 2(n - x) = 3(n - 2),$$

$$n = 6 - x.$$

Из чего мы делаем вывод, что $n \leqslant 6$. А для $n = 3, 4, 5, 6$ нетрудно построить примеры.

2. Петя и Витя ехали вниз по эскалатору. Посередине эскалатора хулиган Витя сорвал с Пети шапку и бросил её на встречный эскалатор. Пострадавший Петя побежал обратно вверх по эскалатору, чтобы затем спуститься вниз и вернуть шапку. Хитрый Витя побежал по эскалатору вниз, чтобы затем подняться вверх и успеть раньше Пети. Кто успеет раньше, если скорости ребят относительно эскалатора постоянны и не зависят от направления движения?

Решение. Два встречных эскалатора фактически образуют движущееся с постоянной скоростью кольцо (на котором можно кататься, как на карусели), относительно которого шапка неподвижна. Встанем около шапки и понаблюдаем за бегом ребят. При этом можно считать, что эскалаторы стоят, а ребята бегут к нам из диаметрально противоположной точки кольца, но каждый со своей стороны. Теперь очевидно, что к шапке прибежит быстрее тот мальчик, чья скорость больше.

Однако эти рассуждения верны при одном условии: Петя должен добежать до верха эскалатора, прежде чем туда приедет шапка (она сама не сможет пересесть на Петин эскалатор и поехать ему навстречу). Это возможно, если его скорость как минимум вдвое больше скорости эскалатора.

3. В однокруговом турнире на 100 команд в некоторый момент оказалось, что любые четыре команды можно разбить на две пары так, что команды в одной паре уже сыграли между собой. Какое наименьшее количество матчей могло быть сыграно в турнире на данный момент?

Решение. Предположим, что одна из команд не сыграла хотя бы с тремя другими командами. Тогда если рассмотреть эти четыре команды, то мы получим противоречие с условием задачи. Получается, каждая команда сыграла хотя бы 97 игр. То есть всего игр было сыграно хотя бы

$$\frac{100 \cdot 97}{2} = 4850.$$

Опишем пример. Рассмотрим правильный 100-угольник. Проведем все его диагонали, но при этом сотрём всего его стороны. Пусть вершины этого 100-угольник — команды. Если две вершины соединены отрезком, то будет считать, что соответствующие команды играли друг с другом. Очевидно, что в этом для этого примера выполнено условие задачи.

4. Две окружности пересекаются в точках A и B, прямая, проходящая через B пересекает первую окружность в точке C, а вторую — в точке D. Касательные к первой и второй окружности в точках C и D соответственно пересекаются в точке M. Прямая, проходящая через точку пересечения AM и CD параллельно CM пересекает AC в точке K. Докажите, что BK касается второй окружности.

Решение. Пусть L — точка пересечения CD и AM. Заметим, что $\angle MCL = \angle KLC$ в силу параллельности $CM \parallel KL$. Кроме того, $\angle MCL = \angle CAB = \angle KAB$ как угол между касательной и хордой для первой окружности, поэтому $BLAK$ — вписанный. Четырехугольник $ACMD$ тоже вписанный, поскольку $\angle MCA = \angle ABD = 180^\circ - \angle ADM$. Теперь, пользуясь двумя найденными окружностями, запишем цепочку равенств $\angle KBA = \angle KLA = \angle CMA = \angle CDA$, что и требовалось.

5. Найдите все такие натуральные m, n и простые p, что число $\dfrac{7^n + p \cdot 2^m}{7^n - p \cdot 2^m}$ — тоже натуральное.

Ответ. $p = 3$, $n = 2$, $m = 4$ или $p = 3$, $n = 1$, $m = 1$.

Решение. Если к дроби прибавить или отнять 1, получим, что $2 \cdot 7^n \,\vdots\, 7^n - p \cdot 2^m$ и $p \cdot 2^{m+1} \,\vdots\, 7^n - p \cdot 2^m$. Поскольку знаменатель нечетный при любых натуральных m и n, отсюда следует, что $(7^n, p) \,\vdots\, 7^n - p \cdot 2^m$. Таким образом, у нас есть два случая: когда $7^n - p \cdot 2^m = 7$ и $p = 7$ или $7^n - p \cdot 2^m = 1$.

В первом случае получаем, что $7^{n-1} - \cdot 2^m = 1$, можно это переписать иначе: $7^{n-1} - 1 = 2^m$. Заметим, что левая часть при любом m кратна 3, а степень двойки не кратна, поэтому решений нет.

Во втором случае аналогично получаем, что $p = 3$. Кроме того, если $m \geqslant 2$, n чётно (скажем, что $n = 2k$), потому что $7^n - 1 \,\vdots\, 4$. Тогда $3 \cdot 2^m = (7^k - 1)(7^k + 1)$. Заметим, что НОД сомножителей равен 2, поэтому одна из скобок равна 6. Такое бывает только при $k = 1$. Таким образом, получаем единственное решение $p = 3$, $n = 2$, $m = 4$. Остается случай $m = 1$, тогда $n = 1$.

6. Федя и Петя договорились показать Маше фокус. У них есть колода из 100 карт, пронумерованных числами $1, 2, \dots, 100$. Оборотные стороны всех карт неразличимы. Маша раскладывает карты в произвольном порядке числом вверх. Петя, посмотрев на них, либо меняет две карты местами, либо не делает ничего. Затем карты (с сохранением порядка) переворачиваются числом вниз, и в комнату входит Федя. Маша называет ему число от 1 до 100, и он по одной переворачивает карты с целью перевернуть карту со сказанным числом. Могут ли Федя и Петя договориться так, чтобы Федя гарантированно нашёл карточку не более, чем за 50 переворачиваний?

Ответ. Могут.

Решение. Построим граф из 100 вершин, проведем ребро между i – ой и j – ой вершиной, если на i – ом месте стоит карта с номером j. Заметим, что такой граф является объединением непересекающихся циклов. Опишем теперь стратегию для Феди и Пети. Если Петя видит, что длина каждого из циклов не превосходит 50, то он ничего не делает. В противном случае, среди циклов найдется один, в котором больше 50 вершин. Тогда пусть Петя переставит карты, которые соответствуют 1 и 51 вершине цикла при любой последовательной нумерации. Заметим, что тогда большой цикл распадется на цикл длины 50 и еще какой-то цикл (длины не больше 50). В любом случае, при такой стратегии к ходу Феди получится ситуация, в которой все циклы имеют длину меньше 50. Теперь опишем стратегию Феди. Пусть Маша назвала число k. Тогда Федя первым своим ходом перевернет карту, лежащую на месте k. Каждым следующим своим ходом он будет переворачивать карту на том месте, какой номер был на предыдущей карте. Так он перевернет карты на всех местах, которые есть в цикле, содержащем k. Весь цикл он обойдет не больше, чем за 50 переворачиваний и последним переворотом найдет нужную карту.