

## Диагностическая работа, 1 этап

1. По кругу расположены 450 лампочек. Изначально все лампочки потушены. За ход разрешается зажечь лампочку, если две соседние лампочки либо обе зажжены, либо обе потушены. Какое наибольшее число лампочек можно зажечь таким образом?
2. Найдите все пары целых чисел  $x, y$  такие, что выполнено

$$xy = x + 13y.$$

В качестве ответа напишите всевозможные значения  $xy$ .

3. На сторона  $AC$  и  $BC$  равностороннего треугольника  $ABC$  отмечены точки  $K$  и  $L$  соответственно. Оказалось, что  $\angle ABK + \angle ALC = 120^\circ$ . Найдите  $\frac{AB}{LC}$ , если известно, что  $AK : KC = 2 : 9$ .
4. Учитель выписал на доску выражение

$$\sqrt{29 + \sqrt{k}} + \sqrt{29 - \sqrt{k}}.$$

При каком наименьшем натуральном значении  $k$  выражением принимает целое значение?

5. На острове рыцарей и лжецов все жители разного роста. Каждый из 350 жителей сказал одну из фраз «На острове нет рыцаря выше меня ростом» или «На острове нет лжеца ниже меня ростом». Оказалось, что первую и вторую фразы произнесли по 175 раз. Какое максимальное число рыцарей могло быть?
6. На отрезке  $[-20, 20]$  выбирают случайное вещественное число  $a$ . Найдите вероятность того, что многочлен

$$x^3 + (2a + 1)x^2 + (4a - 1)x + 2$$

имеет 3 вещественных корня (с учётом кратности).

7. В трапеции  $ABCD$  с основаниями  $BC$  и  $AD$  биссектриса угла  $CAD$  проходит через середину отрезка  $BD$ . Известно, что  $BD = 2AB$ . Найдите  $AD$ , если  $BC = 13$ .
8. Граф состоит из 20 вершин: 10 вершин степени 6 и 10 вершин степени 4. Найдите количество троек вершин, что в них либо любые две вершины соединены ребром, либо любые две вершины не соединены ребром.
9. Пусть  $I$  — центр вписанной окружности треугольника  $ABC$ . Биссектриса угла  $\angle ACB$  пересекает прямую  $AB$  в точке  $L$ , а описанную окружность треугольника  $ABC$  в точке  $D$ . Пусть  $LI = 2$  и  $LD = 3$ . Найдите  $IC$ .

10. Множество  $A$  состоит из натуральных чисел, причём его наименьший элемент равен 1, а наибольший — 104. Любой элемент  $A$  (кроме 1) равен сумме двух (возможно, равных) чисел, являющихся элементами  $A$ . Из какого минимального количества элементов может состоять множество  $A$ ?