Диагностическая работа, 1 этап. Решения.

1. По кругу расположены 450 лампочек. Изначально все лампочки потушены. За ход разрешается зажечь лампочку, если две соседние лампочки либо обе зажжены, либо обе потушены. Какое наибольшее число лампочек можно зажечь таким образом?

Ответ. 450.

Решение. Пронумеруем все лампочки числами от 1 до 450. Сначала зажжём все лампочки с нечётными номерами: оба их соседа будут потушены, поэтому мы можем так сделать. После этого зажжём все лампочки с чётными номерами: оба их соседа зажжены, поэтому мы можем так сделать. Итого мы зажгли все лампочки.

2. Найдите все пары целых чисел x, y такие, что выполнено

$$xy = x + 13y.$$

В качестве ответа напишите всевозможные значения xy.

Ответ. $196, -144, 52, 0$.

Решение. Перенесём $x + 13y$ в левую часть и прибавим к обоим частям равенства по 13, тогда выражение слева можно разложить на множители: $(x-13)(y-1) = 13$. 13 — простое число, а значит раскладывается на произведение целых чисел только двумя способами $1 \cdot 13$ и $(-1) \cdot (-13)$. Приравниваем скобки $(x - 13)$ и $(y - 1)$ к данным числам, не забывая про порядок множителей, и получаем 4 пары чисел: $(x = 14, y = 14)$, $(x = 26, y = 2)$, $(x = 12, y = -12)$, $(x = 0, y = 0)$. Осталось посчитать произведение xy и получить 4 возможных варианта: $196, 52, -144, 0$.

3. На сторона AC и BC равностороннего треугольника ABC отмечены точки K и L соответственно. Оказалось, что $\angle ABK + \angle ALC = 120°$. Найдите $\dfrac{AB}{LC}$, если известно, что $AK : KC = 2 : 9$.

Ответ. $\dfrac{11}{2}$.

Решение. Из условия следует, что $\angle CAL = 180° - \angle ACB - \angle ALC = 180° - 60° - (120° - \angle ABK) = \angle ABK$. Получается, что треугольники ACL и BAK равны, поскольку у них все углы равны и $AC = AB$. Тогда

$$\frac{AB}{CL} = \frac{AC}{CL} = \frac{AB}{AK} = \frac{AC}{AK} = \frac{11}{2}.$$

4. Учитель выписал на доску выражение

$$\sqrt{29 + \sqrt{k}} + \sqrt{29 - \sqrt{k}}.$$

При каком наименьшем натуральном значении k выражением принимает целое значение?

Ответ. 312.

Решение. Возведём данное выражение в квадрат. Получим

$$29-\sqrt{k}+29+\sqrt{k}+2\sqrt{\left(29-\sqrt{k}\right)\left(29+\sqrt{k}\right)}=58+\sqrt{841-k}.$$

Нам надо узнать при каком наименьшем натуральном значении k это выражение будет точным квадратом. При $k=0$ это выражение будет равно $58+29=87$. Раз нужно найти минимальное значение k, то у данного выражения нужно найти максимум. Ближайший точный квадрат меньший 87, это 81. Легко проверить, что это значение получается при $k=312$.

5. На острове рыцарей и лжецов все жители разного роста. Каждый из 350 жителей сказал одну из фраз «На острове нет рыцаря выше меня ростом» или «На острове нет лжеца ниже меня ростом». Оказалось, что первую и вторую фразы произнесли по 175 раз. Какое максимальное число рыцарей могло быть?

Ответ. 176.

Решение. *Пример.* Выстроим их по уменьшению роста: 1 рыцарь, 174 лжеца, и 175 рыцарей. 175 «низких» рыцарей скажут «На острове нет лжеца ниже меня ростом», а все остальные «На острове нет рыцаря выше меня ростом».

Оценка. Посмотрим на всех рыцарей кроме самого высокого. Они все сказали фразу «На острове нет лжеца ниже меня ростом» так как есть рыцарь выше их ростом. Получаем, что этих рыцарей не более 175 (данную фразу всего произнесло 175 человек) и ещё один высокий рыцарь, всего не более 176 рыцарей.

6. На отрезке $[-20,20]$ выбирают случайное вещественное число a. Найдите вероятность того, что многочлен

$$x^3+(2a+1)x^2+(4a-1)x+2$$

имеет 3 вещественных корня (с учётом кратности).

Ответ: 0.95.

Решение: Заметим, что наш многочлен третьей степени равен

$$(x+2)(x^2+(2a-1)x+1)$$

(до этого равенства можно догадаться следующим образом: угадать, что у исходного многочлена есть корень -2, а в таком случае он должен делится на $x+2$ по теореме Безу). Теперь нам надо узнать когда $x^2+(2a-1)x+1$ имеет два корня (с учётом кратности). Но мы знаем, что это так тогда и только тогда, когда $(2a-1)^2-4\geqslant 0$, то есть когда $a\geqslant\dfrac{3}{2}$ или когда $-\dfrac{1}{2}\geqslant a$. Значит на отрезке $[-20,20]$ нам не подходит только интервал $\left(-\dfrac{1}{2},\dfrac{3}{2}\right)$, следовательно требуемая вероятность равна $\dfrac{38}{40}=0.95$.

7. В трапеции $ABCD$ с основаниями BC и AD биссектриса угла CAD проходит через середину отрезка BD. Известно, что $BD = 2AB$. Найдите AD, если $BC = 13$.

Ответ. 39.

Решение. Пусть K, L, M — середины AB, AC и BD соответственно. Они лежат на одной прямой — на средней линии трапеции. По условию $\angle LAM = \angle MAD = \angle LMA$, следовательно, треугольник ALM равнобедренный, кроме того, по условию ABM равнобедренный, поэтому BL — медиана в треугольнике ABM. Через точку L проходят две медианы треугольника ABM, следовательно, проходит и третья. Таким образом, отрезок BM делится точкой пересечения диагоналей трапеции X пополам. Поэтому $\frac{BC}{AD} = \frac{BX}{XD} = \frac{1}{3}$, следовательно, $AD = 39$.

8. Граф состоит из 20 вершин: 10 вершин степени 6 и 10 вершин степени 4. Найдите количество троек вершин, что в них либо любые две вершины соединены ребром, либо любые две вершины не соединены ребром.

Ответ. 450.

Решение. Давайте посчитаем тройки вершин, не подходящих под условие, то есть такие, для которых в них есть *странная вершина*: вершина, которая соединена с одной вершиной из тройки, и не соединена с другой.

Рассмотри вершину V степени d. В скольких тройках она является странной вершиной? В такой тройке должна быть одна вершина из соединённых с V (таких d штук) и одна из не соединённых (таких $19 - d$ штук), итого получается $d(19 - d)$ троек. Если теперь сложить эти числа по всем вершинам, то мы получим удвоенное число не подходящих под условие троек (легко заметить, что в каждой такой тройке ровно две странные вершины), то есть число неподходящих троек равно $(10 \cdot 6 \cdot 13 + 10 \cdot 4 \cdot 15)/2 = 690$. Теперь посчитаем сколько троек всего и вычтем оттуда 690 — это и будет ответом на задачу. $C_{20}^3 - 690 = 1140 - 690 = 450$.

9. Пусть I — центр вписанной окружности треугольника ABC. Биссектриса угла $\angle ACB$ пересекают прямую AB в точке L, а описанную окружность треугольника ABC в точке D. Пусть $LI = 2$ и $LD = 3$. Найдите IC.

Ответ. $\frac{10}{3}$

Решение. По лемме о трезубце D — центр описанной окружности AIB. Поэтому степень точки L относительно AIB равна $DL^2 - DI^2 = 5^2 - 3^2 = -16$. Поскольку L лежит на радикальной оси AB окружностей AIB и ABC, получаем, что $-16 = -DL \cdot LC$, откуда $LC = \frac{16}{3}$ и $IC = LC - LI = \frac{16}{3} - 2 = \frac{10}{3}$.

10. Множество A состоит из натуральных чисел, причём его наименьший элемент равен 1, а наибольший — 104. Любой элемент A (кроме 1) равен сумме двух (возможно, равных) чисел, являющихся элементами A. Из какого минимального количества элементов может состоять множество A?

Ответ. 9.

Решение. Пусть $1 = a_1 < a_2 < a_3 < ...$ это элементы A. Заметим, что выполняется неравенство $a_{i+1} \leqslant 2a_i$, так как a_{i+1} должно равняться сумме двух меньших чисел. Из этого неравенство мы получаем, что $a_i \leqslant 2^{i-1}$. Докажем теперь, что 8 элементов в множестве нам не хватит. Пусть хватило. Тогда $a_8 = 100$. Заметим, что $a_6 \leqslant 32$ и $a_7 \leqslant 64$, значит $a_6 + a_7 < 100$. Значит 100 получается как сумма двух равных чисел, равных 50. Значит $a_7 = 50$. $a_5 + a_6 \leqslant 16 + 32 = 48 < 50$, значит 50 это сумма двух равных чисел, значит $a_6 = 25$. $a_4 + a_5 \leqslant 8 + 16 = 24 < 25$, значит 25 равно сумме двух равных чисел. Но оно нечётно, такого быть не может. Значит 8 чисел нам не хватит. Пример на 9 чисел: $A = \{1, 2, 4, 8, 16, 32, 40, 64, 104\}$.