ММОшный разнобой

1. Можно ли число $\frac{1}{10}$ представить в виде произведения десяти положительных правильных дробей? (То есть выражений вида $\frac{p}{q}$, где p и q — натуральные числа и $p < q$.)

2. В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты BB_1 и CC_1. Точка O — центр окружности, описанной около треугольника ABC. Докажите, что расстояние от точки A_1 до прямой BO равно расстоянию от точки B_1 до прямой AO.

3. Существует ли вписанный в окружность 19-угольник, у которого нет одинаковых по длине сторон, а все углы выражаются целым числом градусов?

4. На прямой сидят 2019 точечных кузнечиков. За ход какой-нибудь из кузнечиков прыгает через какого-нибудь другого так, чтобы оказаться на прежнем расстоянии от него. Прыгая только вправо, кузнечики могут добиться того, чтобы какие-то двое из них оказались на расстоянии ровно 1 мм друг от друга. Докажите, что кузнечики могут добиться того же, прыгая из начального положения только влево.

5. Существует ли 2016-значное число, перестановкой цифр которого можно получить 2016 разных 2016-значных полных квадратов?

6. Три велосипедиста ездят в одном направлении по круглому треку длиной 300 метров. Каждый из них движется со своей постоянной скоростью, все скорости различны. Фотограф сможет сделать удачный снимок велосипедистов, если все они окажутся на каком-либо участке трека длиной d метров. При каком наименьшем d фотограф рано или поздно заведомо сможет сделать удачный снимок?

7. Единичный квадрат разрезан на n треугольников. Докажите, что одним из треугольников можно накрыть квадрат со стороной $1/n$.

8. В каждой клетке квадратной таблицы написано по числу. Известно, что в каждой строке таблицы сумма двух наибольших чисел равна a, а в каждом столбце таблицы сумма двух наибольших чисел равна b. Докажите, что $a = b$.