

## Ушастая геометрия

1. На сторонах остроугольного треугольника  $ABC$  во внешнюю сторону построены правильные треугольники  $ABC_1$ ,  $BCA_1$ ,  $ACB_1$ .
  - (a) Докажите, что длины отрезков  $AA_1$ ,  $BB_1$  и  $CC_1$  равны.
  - (b) Докажите, что описанные окружности этих треугольников пересекаются в одной точке.
  - (c) Докажите, что отрезки  $AA_1$ ,  $BB_1$ ,  $CC_1$  пересекаются в одной точке  $T$ .
  - (d) Докажите, что сумма расстояний от точки  $X$  до вершин треугольника минимальна тогда и только тогда, когда  $X = T$ .
  - (e) Докажите, что центры построенных треугольников образуют правильный треугольник.
  - (f) Докажите, что отрезки, соединяющие вершины треугольника  $ABC$  с центрами соответствующих правильных треугольников, пересекаются в одной точке.
  - (g) Докажите, что прямая, соединяющая точку  $A$  с центром треугольника  $BCA_1$ , перпендикулярна прямой  $B_1C_1$ .
2. На сторонах  $AB$  и  $AC$  остроугольного треугольника  $ABC$  построены квадраты  $ABPQ$  и  $ACMN$ .
  - (a) Докажите, что медиана треугольника  $ABC$ , проведённая из вершины  $A$ , перпендикулярна прямой  $QN$ .
  - (b) Докажите, что центры квадратов и середины отрезков  $BC$  и  $QN$  образуют квадрат.
  - (c) Пусть  $X$  — центр квадрата, построенного на стороне  $BC$  ввне треугольника  $ABC$ . Докажите, что отрезки  $AH$ ,  $PM$ ,  $QC$ ,  $BN$  пересекаются в одной точке.
  - (d) Пусть угол  $A$  прямой. Пусть  $H$  — основание высоты из  $A$  на  $BC$ . Докажите, что  $\angle PHN = 90^\circ$ .
  - (e) Проведём через точки  $P$  и  $M$  перпендикуляры к прямым  $AC$  и  $AB$  соответственно. Докажите, что их точка пересечения лежит на высоте треугольника  $ABC$ , проведённой из вершины  $A$ .
  - (f) Докажите, что отрезки  $BM$  и  $CP$  пересекаются на высоте треугольника  $ABC$ , проведённой из вершины  $A$ .
3. На сторонах серого треугольника построили квадраты. Вершины этих квадратов соединили, получив красные треугольники, а на построенных отрезках построили квадраты. Вершины новых квадратов соединили, получив синие четырёхугольники. Прделав то же самое, получили зелёные четырёхугольники и т.д.
  - (a) Докажите, что синие четырёхугольники являются трапециями.
  - (b) Докажите, что все одноцветные четырёхугольники имеют одинаковую пло-

щадь.

