Инвариант

1. На доске было написано число 8^n. Катя вычислила сумму его цифр, у полученного числа снова вычислила сумму цифр, и так несколько раз. Могло ли у нее получиться число 2021?

2. Камни лежат в трех кучках: в одной — 51 камень, в другой — 49 камней, а в третьей — 5 камней. Разрешается объединять любые кучки в одну, а также разделять кучку из четного количества камней на две равные. Можно ли получить 105 кучек по одному камню в каждой?

3. Дно прямоугольной коробки было выложено угольными плитками размером 2×2 и 1×4. Плитки высыпали из коробки и при этом потеряли плитку размером 2×2. Вместо нее нашли плитку размером 1×4. Можно ли теперь выложить дно коробки?

4. За один ход число, написанное на доске, разрешается либо заменить на удвоенное, либо стереть у него последнюю цифру. Вначале на доске написано число 456. Можно ли из него получить число 14?

5. На доске выписаны числа 1, 1/2, 1/3, ..., $1/n$. Выбираем из написанных на доске два произвольных числа a и b, стираем их и пишем на доску число $a+b+ab$. Такую операцию проделываем $n-1$ раз, пока не останется одно число. Какое это число? Найдите его и докажите, что оно не зависит от последовательности выбора чисел.

6. Дана некоторая тройка чисел. С любыми двумя из них разрешается проделывать следующее: если эти числа равны a и b, то их можно заменить на $\dfrac{a+b}{\sqrt{2}}$ и $\dfrac{a-b}{\sqrt{2}}$. Можно ли с помощью таких операций получить тройку $(1-\sqrt{2}, 2, \sqrt{2})$ из тройки $1, \sqrt{2}, 1+\sqrt{2}$.