Непростая индукция

1. Докажите, что для любого натурального числа n существует составленное из цифр 1 и 2 число, делящееся на 2^n.

2. На доске написана единица и девять нулей. Можно стереть два числа и записать на доску два числа, равных их среднему арифметическому. Какое наименьшее ненулевое число можно получить?

3. Назовём натуральное число ровным, если в его записи все цифры одинаковы. Докажите, что любое n-значное число можно представить как сумму не более чем $n+1$ ровных чисел.

4. Докажите неравенство $\sqrt{2\sqrt{3\sqrt{4\ldots\sqrt{n}}}} < 3$.

5. Клетки шахматной доски 100×100 раскрашены в 4 цвета так, что в любом квадрате 2×2 все клетки разного цвета. Докажите, что угловые клетки раскрашены в разные цвета.

6. Обозначим
$$[n]! = 1 \cdot 11 \cdot 111 \cdot \ldots \cdot \underbrace{11\ldots11}_{n}.$$
Докажите, что $[n+m]!$ делится на произведение $[n]! \cdot [m]!$.

7. В таблице 100×100 расставлены действительные числа. В каждом столбце подчеркнули m наибольших чисел, а в каждой строке — n наибольших чисел. Докажите, что по крайней мере mn чисел подчёркнуты дважды.