Чиселки. Принцип крайнего

Иногда в задаче бывает полезно посмотреть на наибольшее/наименьшее число, наибольший/наименьший простой делитель, наибольшую степень вхождения некоторого простого делителя и т.п.

1. Существуют ли такое 2021 различное натуральное число, что квадрат каждого из них не больше суммы оставшихся чисел?

2. На доске написано несколько натуральных чисел. Сумма любых двух из них — натуральная степень двойки. Какое наибольшее число различных может быть среди чисел на доске?

3. В десятичной записи некоторого числа цифры расположены слева направо в порядке убывания. Может ли это число делиться на 111?

4. Найдите все тройки простых чисел p, q, r такие, что четвертая степень любого из них, уменьшенная на 1, делится на произведение двух остальных.

5. Докажите, что следующие числа нецелые:

(a) $\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$; **(b)** $\sum\limits_{1<m<n<2021} \frac{1}{mn}$.

6. Докажите, что в бесконечной последовательности попарно различных натуральных чисел, больших единицы, найдется бесконечное количество чисел, которые больше своего номера в этой последовательности.

7. Петя выбрал несколько последовательных натуральных чисел и каждое записал либо красным, либо синим карандашом (оба цвета присутствуют). Может ли сумма наименьшего общего кратного всех красных чисел и наименьшего общего кратного всех синих чисел являться степенью двойки?

8. Докажите, что каждое натуральное число является разностью двух натуральных чисел, имеющих одинаковое количество простых делителей. (Каждый простой делитель учитывается один раз, например, число 12 имеет два простых делителя: 2 и 3.)

9. Найдите все такие нечётные натуральные $n > 1$, что для любых взаимно простых делителей a и b числа n число $a+b-1$ также является делителем n.