

Триангуляции

Факт. Многоугольник можно *триангулировать*, то есть разбить на треугольники диагоналями, не имеющими общих точек, кроме вершин. Количество треугольников на 2 меньше количества вершин многоугольника.

Определение. Ухом будем называть треугольник триангуляции, две стороны которого совпадают со сторонами исходного многоугольника.

Упражнение. При работе с триангуляциями иногда бывает удобно рассмотреть граф, в котором вершины соответствуют треугольником триангуляции, две вершины соединены ребром, если соответствующие треугольники имеют общую сторону. Что можно сказать про этот граф?

1. Докажите, что в триангуляции n -угольника ($n \geq 4$) хотя бы два уха.
2. На доске нарисовали выпуклый многоугольник. В нём провели несколько диагоналей, не пересекающихся внутри него, так что он оказался разбит на треугольники. Затем возле каждой вершины записали число треугольников, примыкающих к этой вершине, после чего все диагонали стерли. Можно ли по оставшимся возле вершин числам восстановить стёртые диагонали?
3. Докажите, что в триангуляции правильного 2021-угольника хотя бы один треугольник остроугольный.
4. Выпуклый многоугольник разрезан непересекающимися диагоналями на равнобедренные треугольники. Докажите, что в этом многоугольнике найдутся две равные стороны.
5. Сколько существует триангуляций выпуклого n -угольника, в которых никакой треугольник не имеет в качестве всех трёх своих сторон три диагонали исходного n -угольника?
6. На доске нарисован выпуклый n -угольник ($n \geq 4$). Каждую его вершину надо окрасить либо в чёрный, либо в белый цвет. Назовём диагональ *разноцветной*, если её концы окрашены в разные цвета. Раскраску вершин назовём *хорошей*, если n -угольник можно разбить на треугольники разноцветными диагоналями, не имеющими общих точек (кроме вершин). Найдите количество хороших раскрасок.
7. Докажите, что выпуклый многоугольник может быть разрезан непересекающимися диагоналями на остроугольные треугольники не более, чем одним способом.