Немного геометрии

1. В треугольник ABC вписана окружность радиуса R, касающаяся стороны AC в точке M, причём $AM = 2R$ и $CM = 3R$.
(a) Докажите, что треугольник ABC прямоугольный.
(b) Найдите расстояние между центрами его вписанной и описанной окружностей, если известно, что $R = 2$.

2. Точка B лежит на отрезке AC. Прямая, проходящая через точку A, касается окружности с диаметром BC в точке M и второй раз пересекает окружность с диаметром AB в точке K. Продолжение отрезка MB пересекает окружность с диаметром AB в точке D.
(a) Докажите, что прямые AD и MC параллельны.
(b) Найдите площадь треугольника DBC, если $AK = 3$ и $MK = 12$.

3. В треугольник ABC вписана окружность радиуса R, касающаяся стороны AC в точке D, причём $AD = R$.
(a) Докажите, что треугольник ABC прямоугольный.
(b) Вписанная окружность касается сторон AB и BC в точках E и F. Найдите площадь треугольника BEF, если известно, что $R = 5$ и $CD = 15$.

4. Окружность с центром O, вписанная в треугольник ABC, касается стороны BC в точке P и пересекает отрезок BO в точке Q. При этом отрезки OC и QP параллельны.
(a) Докажите, что треугольник ABC — равнобедренный.
(b) Найдите площадь треугольника BQP, если точка O делит высоту BD треугольника в отношении $BO : OD = 3 : 1$ и $AC = 2a$.

5. Окружность с центром O проходит через вершины B и C большей боковой стороны прямоугольной трапеции $ABCD$ и касается боковой стороны AD в точке T. Точка O лежит внутри трапеции $ABCD$.
(a) Докажите, что угол BOC вдвое больше угла BTC.
(b) Найдите расстояние от точки T до прямой BC, если основания трапеции AB и CD равны 4 и 9 соответственно.

6. Дана равнобедренная трапеция $KLMN$ с основаниями KN и LM. Окружность с центром O, построенная на боковой стороне KL как на диаметре, касается боковой стороны MN и второй раз пересекает большее основание KN в точке H, точка Q — середина MN.
(a) Докажите, что четырёхугольник $NQOH$ — параллелограмм.
(b) Найдите KN, если $LKN = 75^\circ$ и $LM = 1$.

В листике суммарно 12 задач (включая пункты).
Количество полученных плюсиков по этому листику конвертируются в оценку по геометрии по следующему принципу.
3 — 7 плюсиков;
4 — 9 плюсиков;
5 — 11 плюсиков.
Задачи принимаются вплоть до 26 декабря.