

Многочлены

1. Основной факт.

(а) Докажите, что многочлен степени n имеет не более n различных корней.

(б) Докажите, что если два многочлена степени не выше n совпадают в $n + 1$ точке, то они равны.

2. Докажите, что значение выражения не зависит от x

$$\frac{(x-a)(x-b)(x-c)}{(d-a)(d-b)(d-c)} + \frac{(x-a)(x-b)(x-d)}{(c-a)(c-b)(c-d)} + \frac{(x-a)(x-c)(x-d)}{(b-a)(b-c)(b-d)} + \frac{(x-b)(x-c)(x-d)}{(a-b)(a-c)(a-d)}.$$

3. Решите уравнение

(а)

$$c \frac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)} + b \frac{(x-a)(x-c)}{(b-a)(b-c)} + a \frac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)} = x;$$

(б)

$$c^2 \frac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)} + b^2 \frac{(x-a)(x-c)}{(b-a)(b-c)} + a^2 \frac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)} = x^2;$$

4. Леша выписал на доске 100 различных чисел. Затем он увеличил все числа на один. Оказалось, что произведение чисел не изменилось. Затем он повторил операцию, и произведение чисел снова не изменилось. Какое наибольшее количество раз он мог повторить эту операцию, чтобы произведение чисел оставалось постоянным?

5. Про многочлен $f(x) = x^{10} + a_9x^9 + \dots + a_0$ известно, что $f(1) = f(-1), \dots, f(5) = f(-5)$. Докажите, что $f(x) = f(-x)$ для любого действительного x .

6. Многочлен P седьмой степени с целыми коэффициентами в семи целых точках принимает значения ± 1 . Докажите, что многочлен P неприводим над $\mathbb{Z}$, иными словами не существует многочленов Q_1 и Q_2 ненулевой степени с целыми коэффициентами таких, что $P = Q_1 Q_2$.

7. Даны два многочлена положительной степени $P(x)$ и $Q(x)$, причём выполнены тождества $P(P(x)) \equiv Q(Q(x))$ и $P(P(P(x))) \equiv Q(Q(Q(x)))$. Обязательно ли тогда выполнено тождество $P(x) \equiv Q(x)$?

8. Найдите все многочлены $p(x)$, такие, что для любых ненулевых чисел x, y, z , удовлетворяющих условию $xz + yz = xy$, имеет место равенство: $\frac{1}{p(x)} + \frac{1}{p(y)} = \frac{1}{p(z)}$.

9. Множество из 2020 подряд идущих натуральных чисел назовем *прекрасным*, если его можно разбить на два подмножества с равными произведениями. Докажите, что прекрасных множеств конечно.

В листике суммарно 11 задач (включая пункты).

Количество полученных плюсиков по этому листику конвертируются в оценку по алгебре по следующему принципу.

3 — 5 плюсиков; 4 — 7 плюсиков; 5 — 9 плюсиков.

Задачи принимаются до 30 января.

У участников региональной олимпиады по математике задачи принимаются до 10 февраля.