

Комплексные числа

*Комплексный обед, а числа —
комплексные!*

Суровая правда жизни

Определение. Комплексным числом называется формальная запись вида $a + bi$, где символ i удовлетворяет условию $i^2 = -1$, $a, b \in \mathbb{R}$. Действия над комплексными числами осуществляются так же, как и над вещественными, с учетом последнего условия. Множество всех комплексных чисел обозначается $\mathbb{C}$. Числом 0 назовем выражение $0 + 0i$.

1. Пусть $x, y \in \mathbb{C}$. Докажите, что
 - (a) $x + y, x - y, xy \in \mathbb{C}$;
 - (b) если $y \neq 0$, то $\frac{x}{y} \in \mathbb{C}$.
2. Упростите выражение: $\frac{(1+3i)(1-4i)+4+i}{2+i}$.
3. Решите уравнение
 - (a) $x^2 + 4 = 0$;
 - (b) $x^2 - (2i + 2)x + (2i - 1) = 0$;
 - (c) $x^3 - 1 = 0$;
 - (d) $x^6 - 1 = 0$;в комплексных числах.

Определение. Числа $a + bi$ и $a - bi$ называются *сопряженными*. Сопряженное к числу z обозначается $\bar{z}$.

4. Проверьте свойства сопряжения: $\bar{\bar{z}} = z$; $\overline{z + t} = \bar{z} + \bar{t}$; $\overline{zt} = \bar{z}\bar{t}$; $\overline{\frac{z}{t}} = \frac{\bar{z}}{\bar{t}}$.
5. (a) Пусть x — корень квадратного трехчлена с рациональными коэффициентами. Докажите, что $\bar{x}$ также является корнем этого уравнения.
(b) Пусть $f(x)$ — многочлен с действительными коэффициентами. Докажите, что если $f(x) = 0$, то $f(\bar{x}) = 0$.

Определение. Модуль комплексного числа $a + bi$ равен $\sqrt{a^2 + b^2}$.

6. Докажите, что $z \cdot \bar{z} = |z|^2$.

Определение. Комплексная плоскость — это геометрическое представление множества комплексных чисел $\mathbb{C}$. Точка плоскости, имеющая координаты (x, y) , изображает комплексное число $z = x + iy$.

7. (a) Изобразите на комплексной плоскости множество точек $|z| = 1$.
(b) Найдите $\min|3 + 2i - z|$ при $|z| \leq 1$.

Определение. Если комплексное число z имеет вид $x + iy$, где $x, y \in \mathbb{R}$, то число x называется вещественной (или действительной) частью комплексного числа z и обозначается $\operatorname{Re} z$, а число y называется мнимой частью комплексного числа z и обозначается $\operatorname{Im} z$.

8. Изобразите на комплексной плоскости множество точек, удовлетворяющее условию

(a) $\operatorname{Im} z \geq \operatorname{Re} z$;

(b) $\operatorname{Im} z + \operatorname{Re} z = 444$;

(c) $\max(|\operatorname{Im} z|, |\operatorname{Re} z|) \leq 1$.

9. **Неравенство треугольника.** Докажите, что

$$|z_1| + |z_2| \geq |z_1 + z_2|.$$

10. Про три комплексных числа известно, что $|z_1| = |z_2| = |z_3| \neq 0$ и $|z_1 + z_2 + z_3| = 0$. Докажите, что точки z_1, z_2, z_3 образуют равносторонний треугольник на комплексной плоскости.

11. Про комплексные числа x, y, z известно, что $|x| = |y| = |z| = 1$. Какие значения может принимать выражение $\left| \frac{x+y+z}{xy+yz+xz} \right|$?

Основная теорема алгебры. Любой многочлен (от одной переменной) ненулевой степени с комплексными коэффициентами имеет, по крайней мере, один комплексный корень.

Следствие из основной теоремы алгебры. Любой многочлен степени n с комплексными коэффициентами имеет в нём ровно n комплексных корней, с учётом их кратности.

12. Докажите, что для любого многочлена $P(x)$ с вещественными коэффициентами существует набор многочленов с вещественными коэффициентами $Q_i(x)$, $\deg Q_i(x) \leq 2$ такой, что $P(x) = Q_1(x)Q_2(x) \cdot \dots \cdot Q_n(x)$.

В листике суммарно 20 задач (включая пункты).

Количество полученных плюсов по этому листику конвертируются в оценку по алгебре по следующему принципу.

3 — 14 плюсов;

4 — 16 плюсов;

5 — 18 плюсов.

Задачи принимаются до 20 января.