

Метод от противного. Принцип Дирихле. Лист №2

0. В этой теме каждую задачу вам нужно решить двумя способами. Таким образом во всех задачах два пункта:
(а) доказать с помощью метода от противного;
(б) доказать с помощью принципа Дирихле.
1. 10 школьников на олимпиаде решили 35 задач, причем известно, что среди них есть школьники, решившие ровно одну задачу, школьники, решившие ровно две задачи и школьники, решившие ровно три задачи. Докажите, что есть школьник, решивший не менее пяти задач.
2. На некоторой очень далёкой планете суша занимает больше половины её поверхности. Докажите, что можно прорыть туннель, проходящий через центр планеты и соединяющий сушу с сушей.
3. Можно ли увезти из каменоломни пятьдесят камней, веса которых равны 370 кг, 372 кг, 374 кг, ... 468 кг, на семи трехтонках?
4. Каждый из 10 участников новогоднего праздника послал поздравительные открытки пятерым другим участникам. Докажите, что какие-то 2 человека послали открытки друг другу.
5. В каждой вершине куба написано число 1 или число 0. На каждой грани куба написана сумма четырёх чисел, написанных в вершинах этой грани. Может ли оказаться, что все числа, написанные на гранях, различны?
6. В классе 25 человек. Известно, что среди любых трёх из них есть двое друзей. Докажите, что есть ученик, у которого не менее 12 друзей.
7. Все клетки бесконечной клетчатой доски покрашены в белый или в черный цвет. Известно, что в каждом квадрате 3×3 не более пяти белых клеток. Докажите, что в каком-нибудь квадрате 4×4 не менее восьми чёрных клеток.