

Чётность, круги и разбиение на пары

0. В однокруговом волейбольном турнире участвовали 6 команд из 6 различных городов. Каждый матч проходил в одном из этих 9 городов. Могло ли случиться так, что каждая команда сыграла все свои матчи на выезде, причём ни в одном городе она не играла дважды? (*Однокруговым называется турнир, в котором любые две команды, участвующие в нём, играют между собой ровно один раз.*)
1. Лягушонок живёт на одном берегу болота, а комары, которых он ест, живут на другом берегу. Однажды лягушонок несколько раз сходил на обед и вернулся домой, после чего заявил, что пересек болото 2009 раз. Могло ли такое быть?
2. Можно ли на шахматной доске расставить 7 коней так, чтобы каждый бил ровно одного другого?
3. Ученица 5 класса Катя и несколько её одноклассников встали в круг, взявшись за руки. Оказалось, что каждый держит за руки либо двух мальчиков, либо двух девочек. Если в кругу стоит пять мальчиков, то сколько там стоит девочек?
4. За круглым столом сидят мальчики и девочки. Докажите, что количество пар соседей разного пола чётно.
Комментарий: в следующих трёх задачах решения принимаются только с использованием рассуждений от противного.
5. Сто человек сидят за круглым столом, причём более половины из них — мужчины. Докажите, что какие-то два мужчины сидят друг напротив друга.
6. По кругу стоят 111 людей. Среди любых двух стоящих рядом есть хотя бы один любопытный. Докажите, что хотя бы 56 человек являются любопытными.
7. По кругу отмечено 101 точка одного из двух цветов. Докажите, что найдутся две одноцветные точки
 - (a) идущие подряд;
 - (b) разделенные ровно двумя другими.