Вопросы к зачету по олимпиадной математике. 7 класс. 1 группа

1. Графы. Лемма о рукопожатиях. На столе лежат монеты достоинством в 1, 2, 3 и 5 копеек на сумму 9 рублей 99 копеек. Может ли число соседей каждой монеты быть равно её достоинству? (Монеты – соседи, если они касаются друг друга)
2. Могут ли степени вершин в графе быть равны:
а) 8, 6, 5, 4, 4, 3, 2, 2?
б) 7, 7, 6, 5, 4, 2, 2, 1?
в) 6, 6, 6, 5, 5, 3, 2, 2?
3. В одной стране из каждого города выходит 100 дорог и от любого города можно добраться до любого другого. Одну дорогу закрыли на ремонт. Докажите, что и теперь от любого города можно добраться до любого другого.
4. Эйлеров путь, эйлеров цикл. Критерий эйлеровости графа.
5. Докажите, что связный граф с $2n$ нечётными вершинами можно нарисовать, оторвав карандаш от бумаги ровно $n-1$ раз и не проводя никакое ребро дважды.
6. Двудольные графы. Сумма степеней одной доли. Критерий двудольности графа.
7. Можно ли расставить 777 шахматных коней на доске 2017×2017 так, чтобы каждый из них бил ровно 4 других?
8. Лемма о хороводах.
9. В трех вершинах правильного пятиугольника расположили по фишке. Разрешается двигать их по диагонали на свободное место. Можно ли такими действиями добиться, чтобы одна из фишек вернулась на первоначальное место, а две другие поменялись местами?
10. Определения дерева. Доказательство эквивалентности определений.
11. Существование висячих вершин в дереве. Остовное дерево. Доказательство существования остовного дерева для связного графа.
12. В стране 15 городов, некоторые из них соединены авиалиниями, принадлежащими трём авиакомпаниям. Известно, что даже если любая из авиакомпаний прекратит полеты, можно будет добраться из каждого города в любой другой (возможно, с пересадками), пользуясь рейсами оставшихся двух компаний. Какое наименьшее количество авиалиний может быть в стране?
13. Делимость. Докажите, что у составного числа a найдется такой простой делитель p, что $p^2 \leq a$.
14. На доске записаны двузначные числа. Каждое число составное, но любые два числа взаимно просты. Какое наибольшее количество чисел может быть записано?
15. Докажите, что простых чисел бесконечно много.
16. Существуют ли 100 подряд идущих составных чисел?
17. Основная теорема арифметики.
18. Определение остатка. Действия с остатками. Найдите остаток при делении на 7 числа 143^{45}.
19. Назовем натуральное n удобным, если n^2+1 делится на 2501. Докажите, что среди $1, \ldots, 2500$ четное количество удобных чисел.
20. Докажите, что число 108 нельзя представить в виде суммы двух точных кубов.
21. Пусть $P_n = p_1 p_2 \ldots p_n$ — произведение первых n простых чисел ($n > 1$). Докажите, что а) $P_n - 1$ б) $P_n + 1$ не является полным квадратом.
22. Признаки делимости на $2^n, 5^n, 9, 11, 7, 13$.
23. Даны 19 карточек. Можно ли на каждой из карточек написать ненулевую цифру так, чтобы из этих карточек можно было сложить ровно одно 19-значное число, кратное на 11?
24. Найдите наибольшее число из которого вычеркиванием цифр нельзя получить число делящееся на 11.
25. а) Докажите, что у любого числа вида $4k+3$, есть простой множитель такого же вида.
б) Докажите, что множество простых чисел вида $p = 4k+3$ бесконечно.
26. Комбинаторика. Правило сложения и произведения. Как найти количество делителей числа n?
27. Комбинаторика. Перестановки, размещения, сочетания.
28. а)На плоскости дано n точек. Сколько имеется отрезков с концами в этих точках?
б)На плоскости отмечено n точек так, что никакие три из них не лежат на одной прямой. Сколько существует треугольников с вершинами в этих точках?
в)На плоскости дано n прямых таких, что никакие две не параллельны и никакие три не проходят через одну точку. Чему равно число образованных ими треугольников?
29. На двух параллельных прямых выбраны точки $A_1, A_2, \ldots, A_m$ и $B_1, B_2, \ldots, B_n$ соответственно и проведены все отрезки вида A_iB_j ($1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n$). Сколько будет точек пересечения, если известно, что никакие три из этих отрезков в одной точке не пересекаются?
30. На клетчатой бумаге нарисован прямоугольник, стороны a и b (a, b - целые) которого идут по линиям сетки. Найдите количество способов добраться из левого нижнего угла прямоугольника в правый верхний угол, если можно двигаться только по линиям сетки, причем только вправо и вверх.
31. Метод шаров и перегородок. Непустые ящики и любые. Сочетания с повторениями. Компания друзей отправила одного из них в магазин за чипсами. Он пришел с твердым намерением купить 5 пачек чипсов. В магазине оказалось их всего 7 видов. Сколькими способами посланник может выполнить свою миссию?
32. Свойства сочетаний.
33. Треугольник Паскаля.
34. а) Докажите, что $C_n^k = C_{n-1}^{k-1} + C_{n-2}^{k-1} + ... + C_{k-1}^{k-1}$.
б) Докажите, что $C_n^k = C_{n-1}^{k} + C_{n-2}^{k-1} + ... + C_{n-k-1}^{0}$.
35. Докажите, что число а равно количеству путей, ведущих из вершины треугольника Паскаля к месту, где стоит число а.(Мы можем двигаться только вниз от вершины, переходя к одному двух из чисел на следующей строке, между которыми оно стоит.)
36. Докажите, что каждое число а в треугольнике Паскаля, уменьшенное на 1, равно сумме всех чисел, заполняющих параллелограмм, ограниченный теми правой и левой диагоналями, на пересечении которых стоит число а (сами эти диагонали в рассматриваемый параллелограмм не включаются).
37. Бином Ньютона.
38. При каких натуральных n число $(\sqrt{2}+1)^n - (\sqrt{2}-1)^n$ будет целым?

39. Инвариант. В клетчатом квадрате $n \times n$ одна угловая клетка белая, а все остальные -— черные. Разрешается взять любую строку или столбец квадрата и поменять в ней цвет каждой клетки. Можно ли такими операциями перекрасить все клетки квадрата в белый,если
а) n чётно ;
б) n нечётно и $n > 1$;
в) Пусть $n > 4$, но закрашена не угловая клетка, а соседняя с ней. При этом дополнительно можно перекрашивать любые диагонали (не только главные).

40. Есть три кучки камней: 51 камень – в первой, 49 – во второй, 5 – в третьей. Разрешается объединять любые кучки в одну, а также разделять кучку, состоящую из четного количества камней, на две равные. Можно ли получить 105 кучек по одному камню в каждой?

41. На доске выписаны числа $1, \frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{100}$. Разрешается стереть любые два числа a и b заменить их на число $ab + a + b$. Какое число останется после 99 таких операций?

42. Принцип крайнего. На шахматной доске стоит несколько ладей. Может ли быть так, что все бьют три ладьи?

43. На полях шахматной доски расставлены числа 1, 2, ..., 64. Докажите, что найдется пара соседних по стороне клеток, где числа отличаются не меньше, чем на 5.

44. На шахматной доске, первоначально пустой, расставляются ладьи по следующему правилу: каждым ходом на доску устанавливается ладья, и, если она кого-нибудь побила, то одна из побитых ею ладей снимается с доски. Какое наибольшее число ладей может оказаться на доске?

45. Докажите, что существует число делящееся на 5^{1000} не содержащее в своей записи ни одного нуля.

46. Индукция. Пример доказательства тождества по индукции.

47. Докажите, что $2^{3^n} + 1$ делится на 3^{n+1}.

48. $2m$-значное число назовём справедливым, если его чётные разряды содержат столько же чётных цифр, сколько и нечётные. Докажите, что в любом $2m + 1$-значном числе можно вычеркнуть одну из цифр так, чтобы полученное $2m$-значное число было справедливым.

49. Неравенство Бернулли.

50. Можно ли разрезать на такие трехклеточные уголки квадрат следующих размеров без одной клетки (вырезана может быть любая клетка квадрата, даже откуда-то из середины) $2^n \times 2^n$?

51. Ханойские башни. Есть три стержня и несколько колец разного размера. Класть можно только кольцо меньшего размера на кольцо большего размера. За какое наименьшее количество перекладываний можно переместить n колец?

52. На какое количество частей делят плоскость n прямых таких, что среди них нет параллельных и любые 3 не пересекаются в одной точке?

53. Телескопические суммы. Пример задачи.

54. Теория информации. Есть 9 внешне неразличимых шаров, из них 4 из золота, 5 –— из меди. Эксперт знает, какие шары золотые. Но он может только лишь отвечать “да” или “нет” на ваши вопросы. За какое минимальное число вопросов можно узнать все золотые шары?

55. Можно ли это сделать за 3 взвешивания найти 1 фальшивую монету из 13 и узнать легче она или тяжелее?

56. За какое наименьшее количество взвешиваний из 12 монет среди которых одна фальшивая можно найти фальшивую и узнать легче она или тяжелее?

57. Есть 100 коробок, пронумерованных числами от 1 до 100. В одной коробке лежит приз и ведущий знает где он находится. Зритель может послать ведущего пачку записок с вопросами, требующих ответа да или нет. Ведущий перемешивает записки в пачке и не оглашая вопросов честно отвечает на них. Какое наименьшее количество записок нужно послать, чтобы наверняка узнать где находится приз?

58. Катя загадала число от 1 до 256. Петя хочет угадать его за восемь вопросов, но список этих вопросов нужно предъявить заранее. Как ему это сделать?

59. Фокусник с помощником собираются показать такой фокус. Зритель пишет на доске последовательность из N цифр. Помощник фокусника закрывает а)одну цифру б)две соседних цифры черным кружком. Затем входит фокусник. Его задача – отгадать закрытое кружком. При каком наименьшем N фокусник может договориться с помощником так, чтобы фокус гарантированно удался?

60. Талантливый мальчик Петя Торт загадал натуральное число от 1 до 1000. Вы можете задавать ему вопросы вида «Принадлежит ли твоё число множеству X?». На первый вопрос он точно ответит правильно; но потом в какой-то момент у него может испортиться настроение, и он начнёт врать. Обратно настроение не улучшится. За какое наименьшее число вопросов можно гарантированно узнать загаданное число?

61. Сфинкс загадал три произвольных натуральных числа x, y, z. Если путник назовёт Сфинксу три натуральных числах a, b и c, то сфинкс скажет ему, чему равно $ax + by + cz$. Как за два вопроса путник может угадать числа Сфинкса?

62. Эльф нашёл n вкусных конфет. Но его друг проказник, подменил одну деревяшкой в фантике (деревяшка весит больше, чем конфета). В распоряжении эльфа есть только платные весы. Если одна чаша перевешивает другую, то эльф должен будет заплатить 1 рубль и 2 рубля в случае равновесия. При каком наибольшем n можно найти фальшивую конфету, заплатив не более 5 рублей?

63. На доске записаны числа $1, 2, \ldots, 2017$, любые 2 числа разрешается заменять на их среднее арифметическое. Какие целые числа могут остаться после 2016 операций?

64. На шахматной доске 8×8 стоит 50 пешек. Разрешается выбрать квадрат 2×2,в котором стоит единственная пешка, и снять ее. Докажите, что не удастся снять все пешки.

Вопросы к зачету по олимпиадной математике. 7 класс. 2 группа

1. Графы. Лемма о рукопожатиях. На столе лежат монеты достоинством в 1, 2, 3 и 5 копеек на сумму 9 рублей 99 копеек. Может ли число соседей каждой монеты быть равно её достоинству? (Монеты – соседи, если они касаются друг друга)
2. Могут ли степени вершин в графе быть равны:
а) 8, 6, 5, 4, 4, 3, 2, 2?
б) 7, 7, 6, 5, 4, 2, 2, 1?
в) 6, 6, 6, 5, 5, 3, 2, 2?
3. В одной стране из каждого города выходит 100 дорог и от любого города можно добраться до любого другого. Одну дорогу закрыли на ремонт. Докажите, что и теперь от любого города можно добраться до любого другого.
4. Эйлеров путь, эйлеров цикл. Критерий эйлеровости графа.
5. Докажите, что связный граф с $2n$ нечётными вершинами можно нарисовать, оторвав карандаш от бумаги ровно $n-1$ раз и не проводя никакое ребро дважды.
6. Двудольные графы. Сумма степеней одной доли. Критерий двудольности графа.
7. Можно ли расставить 777 шахматных коней на доске 2017×2017 так, чтобы каждый из них бил ровно 4 других?
8. Лемма о хороводах.
9. В трех вершинах правильного пятиугольника расположили по фишке. Разрешается двигать их по диагонали на свободное место. Можно ли такими действиями добиться, чтобы одна из фишек вернулась на первоначальное место, а две другие поменялись местами?
10. Определения дерева. Доказательство эквивалентности определений.
11. Существование висячих вершин в дереве. Остовное дерево. Доказательство существования остовного дерева для связного графа.
12. В стране 15 городов, некоторые из них соединены авиалиниями, принадлежащими трём авиакомпаниям. Известно, что даже если любая из авиакомпаний прекратит полеты, можно будет добраться из каждого города в любой другой (возможно, с пересадками), пользуясь рейсами оставшихся двух компаний. Какое наименьшее количество авиалиний может быть в стране?
13. Делимость. Докажите, что у составного числа a найдется такой простой делитель p, что $p^2 \leq a$.
14. На доске записаны двузначные числа. Каждое число составное, но любые два числа взаимно просты. Какое наибольшее количество чисел может быть записано?
15. Докажите, что простых чисел бесконечно много.
16. Существуют ли 100 подряд идущих составных чисел?
17. Основная теорема арифметики.
18. Определение остатка. Действия с остатками. Найдите остаток при делении на 7 числа 143^{45}.
19. Назовем натуральное n удобным, если n^2+1 делится на 2501. Докажите, что среди $1, \ldots, 2500$ четное количество удобных чисел.
20. Докажите, что число 108 нельзя представить в виде суммы двух точных кубов.
21. Пусть $P_n = p_1 p_2 \ldots p_n$ — произведение первых n простых чисел ($n > 1$). Докажите, что а) $P_n - 1$ б) $P_n + 1$ не является полным квадратом.
22. Признаки делимости на $2^n, 5^n, 9, 11, 7, 13$.
23. Даны 19 карточек. Можно ли на каждой из карточек написать ненулевую цифру так, чтобы из этих карточек можно было сложить ровно одно 19-значное число, кратное на 11?
24. Найдите наибольшее число из которого вычеркиванием цифр нельзя получить число делящееся на 11.
25. а) Докажите, что у любого числа вида $4k+3$, есть простой множитель такого же вида.
б) Докажите, что множество простых чисел вида $p = 4k+3$ бесконечно.
26. Комбинаторика. Правило сложения и произведения. Как найти количество делителей числа n?
27. Комбинаторика. Перестановки, размещения, сочетания.
28. а)На плоскости дано n точек. Сколько имеется отрезков с концами в этих точках?
б)На плоскости отмечено n точек так, что никакие три из них не лежат на одной прямой. Сколько существует треугольников с вершинами в этих точках?
в)На плоскости дано n прямых таких, что никакие две не параллельны и никакие три не проходят через одну точку. Чему равно число образованных ими треугольников?
29. На двух параллельных прямых выбраны точки $A_1, A_2, \ldots, A_m$ и $B_1, B_2, \ldots, B_n$ соответственно и проведены все отрезки вида A_iB_j ($1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n$). Сколько будет точек пересечения, если известно, что никакие три из этих отрезков в одной точке не пересекаются?
30. На клетчатой бумаге нарисован прямоугольник, стороны a и b (a, b - целые) которого идут по линиям сетки. Найдите количество способов добраться из левого нижнего угла прямоугольника в правый верхний угол, если можно двигаться только по линиям сетки, причем только вправо и вверх.
31. Метод шаров и перегородок. Непустые ящики и любые. Сочетания с повторениями. Компания друзей отправила одного из них в магазин за чипсами. Он пришел с твердым намерением купить 5 пачек чипсов. В магазине оказалось их всего 7 видов. Сколькими способами посланник может выполнить свою миссию?
32. Свойства сочетаний.
33. Треугольник Паскаля.
34. а) Докажите, что $C_n^k = C_{n-1}^{k-1} + C_{n-2}^{k-1} + \ldots + C_{k-1}^{k-1}$.
б) Докажите, что $C_n^k = C_{n-1}^{k} + C_{n-2}^{k-1} + \ldots + C_{n-k-1}^{0}$.
35. Докажите, что число а равно количеству путей, ведущих из вершины треугольника Паскаля к месту, где стоит число а.(Мы можем двигаться только вниз от вершины, переходя к одному двух из чисел на следующей строке, между которыми оно стоит.)
36. Докажите, что каждое число а в треугольнике Паскаля, уменьшенное на 1, равно сумме всех чисел, заполняющих параллелограмм, ограниченный теми правой и левой диагоналями, на пересечении которых стоит число а (сами эти диагонали в рассматриваемый параллелограмм не включаются).

37. Инвариант. В клетчатом квадрате $n \times n$ одна угловая клетка белая, а все остальные -— черные. Разрешается взять любую строку или столбец квадрата и поменять в ней цвет каждой клетки. Можно ли такими операциями перекрасить все клетки квадрата в белый,если
а) n чётно ;
б) n нечётно и $n > 1$;
в) Пусть $n > 4$, но закрашена не угловая клетка, а соседняя с ней. При этом дополнительно можно перекрашивать любые диагонали (не только главные).

38. Принцип крайнего. На шахматной доске стоит несколько ладей. Может ли быть так, что все бьют три ладьи?

39. На полях шахматной доски расставлены числа 1, 2, ..., 64. Докажите, что найдется пара соседних по стороне клеток, где числа отличаются не меньше, чем на 5.

40. На шахматной доске, первоначально пустой, расставляются ладьи по следующему правилу: каждым ходом на доску устанавливается ладья, и, если она кого-нибудь побила, то одна из побитых ею ладей снимается с доски. Какое наибольшее число ладей может оказаться на доске?

41. Докажите, что существует число делящееся на 5^{1000} не содержащее в своей записи ни одного нуля.

42. Индукция. Пример доказательства тождества по индукции.

43. Докажите, что $2^{3^n} + 1$ делится на 3^{n+1}.

44. $2m$-значное число назовём справедливым, если его чётные разряды содержат столько же чётных цифр, сколько и нечётные. Докажите, что в любом $2m + 1$-значном числе можно вычеркнуть одну из цифр так, чтобы полученное $2m$-значное число было справедливым.

45. Неравенство Бернулли.

46. Можно ли разрезать на такие трехклеточные уголки квадрат следующих размеров без одной клетки (вырезана может быть любая клетка квадрата, даже откуда-то из середины) $2^n \times 2^n$?

47. Ханойские башни. Есть три стержня и несколько колец разного размера. Класть можно только кольцо меньшего размера на кольцо большего размера. За какое наименьшее количество перекладываний можно переместить n колец?

48. На какое количество частей делят плоскость n прямых таких, что среди них нет параллельных и любые 3 не пересекаются в одной точке?

49. Телескопические суммы. Пример задачи.