

Теорема Карно

Вы уже не раз сталкивались с задачами, в которых надо доказать, что три прямые пересекаются в одной точке (см., например, занятие «Прямые, содержащие высоты треугольника»). На этом и на следующем занятии мы расширим арсенал ваших возможностей для решения таких задач.

На занятии по теме «Теорема Пифагора и теорема, ей обратная» мы познакомились с принципом Карно. В чем его смысл?

Принцип замены разности квадратов наклонных на разность квадратов их проекций называется принципом Карно.

Этот результат был также сформулирован с точки зрения ГМТ.

Геометрическим местом точек M плоскости, для которых разность квадратов расстояний до двух данных точек A и B – постоянная величина, является прямая, перпендикулярная отрезку AB .

Помимо прочего, полученный результат помогает сформулировать и доказать теорему, которая часто применяется для доказательства того, что какие-то три перпендикуляра пересекаются в одной точке. Эта теорема также носит имя Лазаря Карно.

Рассмотрим произвольный треугольник ABC . Отметим на прямых BC , CA и AB точки A' , B' и C' соответственно и восставим перпендикуляры в этих точках к прямым, на которых они лежат (см. рис. 8). Пусть эти перпендикуляры пересеклись в одной точке M . Выведем равенство, связывающее между собой расстояния от точек A' , B' и C' до вершин треугольника.

По принципу Карно запишем три равенства:

$$MA^2 - MB^2 = AC'^2 - BC'^2, \quad MB^2 - MC^2 = BA'^2 - CA'^2, \\ MC^2 - MA^2 = CB'^2 - AB'^2$$

Сложив их почленно, получим: $AC'^2 - C'B^2 + BA'^2 - A'C^2 + CB'^2 - B'A^2 = 0$. (на чертеже мы "обходим" по очереди стороны треугольника, "останавливаясь" в лежащих на них точках со штрихами и берем знакопеременную сумму квадратов получаемых отрезков). Это есть необходимое условие пересечения трех таких перпендикуляров в одной точке.

Является ли оно достаточным? Да, конечно. Докажем это.

Пусть M – точка пересечения перпендикуляров в точках A' и B' к BC и CA соответственно. Опустим перпендикуляр MC_1 на AB , тогда. $AC_1^2 - BC_1^2 + BA'^2 - CA'^2 + CB'^2 - AB'^2 = 0$ Сравнивая два соотношения, получим, что $AC_1^2 - BC_1^2 = AC'^2 - BC'^2$, то есть точки C_1 и C' совпадают (так как являются пересечением ГМТ со стороной).

Таким образом, **если точки A' , B' и C' лежат на прямых BC , CA и AB соответственно, то перпендикуляры, восставленные из этих точек к этим прямым пересекаются в одной точке тогда и только тогда, когда выполняется равенство $AC'^2 - BC'^2 + BA'^2 - CA'^2 + CB'^2 - AB'^2 = 0$.**

Это утверждение и называется **теоремой Карно**, а записанное равенство называется **соотношением Карно**. Его иногда пишут по-другому, перенеся отрицательные слагаемые в правую часть.

Все задачи, предложенные ниже, так или иначе связаны с пересечением перпендикуляров в одной точке. Возможно, что для решения каких-то из них теорема Карно и не потребуется, но в большинстве случаев ее использовать удобно. В нескольких задачах необходимость ее применения сформулирована в явном виде.

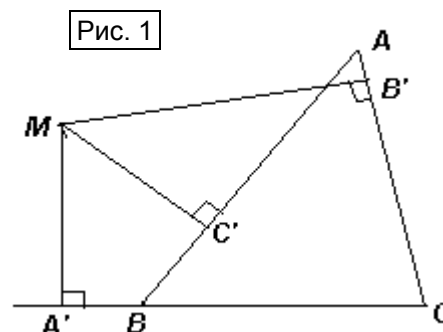


Рис. 1

1. а) Объясните, как обобщить теорему Карно для случая, когда точки A' , B' и C' не лежат на прямых BC , CA и AB соответственно (**обобщение теоремы Карно**).
- б) Объясните, как используя это **обобщение**, доказать, что высоты любого треугольника пересекаются в одной точке.
2. Докажите, что если перпендикуляры, опущенные из точек A_1 , B_1 и C_1 на прямые BC , AC и AB соответственно, пересекаются в одной точке, то и перпендикуляры, опущенные из точек A , B и C на прямые B_1C_1 , A_1C_1 и A_1B_1 соответственно, также пересекаются в одной точке (**теорема Штейнера**).
3. В шестиугольнике $ABCDEF$: $AB = BC$, $CD = DE$, $EF = FA$. Из точек A , C и E проведены перпендикуляры к прямым FB , BD и DF соответственно. Докажите, что они пересекаются в одной точке.
4. а) Даны три попарно пересекающиеся окружности. Используя любые из рассмотренных выше утверждений, докажите, что три их общие хорды пересекаются в одной точке (**лемма о трех хордах**).
- б) Объясните, как использовать утверждение задачи 4а для доказательства пересечения трех высот треугольника в одной точке еще одним способом.
5. а) Используя любые из рассмотренных выше утверждений, докажите, что перпендикуляры, проведенные из центров вневписанных окружностей к тем сторонам треугольника ABC , которых эти окружности касаются, пересекаются в одной точке.
- б) Переформулируйте доказанное утверждение для треугольника с вершинами в центрах вневписанных окружностей и объясните другой способ доказательства этого факта.
6. а) Около треугольника ABC описана окружность. A_1 – точка пересечения ее с прямой, параллельной BC и проходящей через вершину A . Точки B_1 и C_1 определяются аналогично. Из точек A_1 , B_1 и C_1 опустили перпендикуляры на прямые BC , CA и AB соответственно. Докажите, что эти три перпендикуляра пересекаются в одной точке.
- б) Окружность пересекает сторону AB треугольника ABC в точках C_1 и C_2 , сторону BC – в точках A_1 и A_2 , сторону CA – в точках B_1 и B_2 . Известно, что перпендикуляры к сторонам AB , BC и CA , восстановленные в точках C_1 , B_1 и A_1 соответственно, пересекаются в одной точке. Докажите, что перпендикуляры к этим сторонам, восстановленные в точках C_2 , B_2 и A_2 соответственно, также пересекаются в одной точке.
7. В треугольнике ABC проведены высоты AA_1 , BB_1 и CC_1 . Через точки A_1 , B_1 и C_1 проведены прямые, соответственно параллельные OA , OB и OC , где O – центр окружности, описанной около треугольника ABC . Докажите, что эти прямые пересекаются в одной точке.
8. Пусть ABC – равносторонний треугольник, P – произвольная точка. Докажите, что перпендикуляры, опущенные из центров вписанных окружностей треугольников PAB , PBC и PCA на прямые AB , BC и CA соответственно, пересекаются в одной точке.
9. Докажите, что перпендикуляры, восстановленные из оснований биссектрис треугольника, пересекаются в одной точке тогда и только тогда, когда треугольник – равнобедренный.