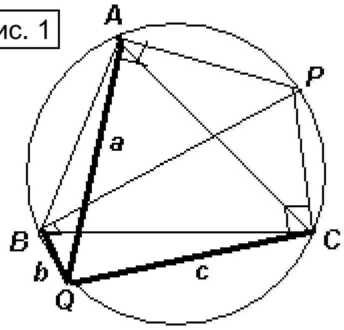
Перпендикуляры и описанная окружность

По статье Е. Бакаева, П. Кожевникова, И. Яковлева «Перпендикуляры и еще один признак вписанного четырехугольника», журнал «Квант», №5-6/2015.

На этом занятии мы познакомимся еще с одной конструкцией, в которой три перпендикуляра пересекаются в одной точке. Предложенная серия задач опирается на простой, но важный факт, который мы сформулируем в виде теоремы.

Теорема. Дан треугольник ABC и точка P. Через вершины A, B и C проведены прямые a, b и c, соответственно перпендикулярные прямым PA, PB и PC. Прямые a, b и c пересекаются в одной точке тогда и только тогда, когда точки P, A, B и C лежат на одной окружности.

Рис. 1



Доказательство. См. рис. 1.

1) Пусть a, b и c пересекаются в точке Q. Проведем окружность с диаметром PQ. Так как $\angle QAP = \angle QBP = \angle QCP = 90^\circ$, то точки A, B и C лежат на этой окружности.

2) Пусть точка P лежит на окружности, описанной около треугольника ABC. Рассмотрим точку Q, диаметрально противоположную P. Тогда $\angle QAP = \angle QBP = \angle QCP = 90^\circ$, то есть прямые a, b и c пересекаются в точке Q.

Используя эту теорему, вы сможете не только доказывать пересечение каких-то перпендикуляров в одной точке или тот факт, что какие-то четыре точки лежат на одной окружности, но и некоторые другие факты .

Упражнения и задачи для самостоятельного решения

1. К окружности с центром O проведены касательные в точках A и B, которые пересекаются в точке P. Из точки P проведена прямая, пересекающая окружность в точках C и D (C лежит между P и D). M – середина отрезка CD. Докажите, что: а) точка M лежит на окружности, описанной около треугольника APB; б) $\angle BMA = 2\angle BDA$; в) прямая BM вторично пересекает окружность в точке E так, что $AE \parallel CD$.

2. а) Три прямые пересекаются в одной точке под углами 60° друг к другу. Из произвольной точки, не лежащей на этих прямых, опущены на них перпендикуляры. Докажите, что основания перпендикуляров являются вершинами равностороннего треугольника. б) Через точку внутри окружности проведены три хорды под углами 60° друг к другу. Докажите, что их середины являются вершинами равностороннего треугольника.

3. В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты AA', BB' и CC'. Докажите, что точки A, A' и середины отрезков BC' и CB' лежат на одной окружности.

4. В треугольнике ABC проведены высоты AA', BB' и CC'.

а) Произвольную точку спроектировали на прямые, содержащие высоты. Докажите, что треугольник, у которого проекции являются вершинами, подобен треугольнику ABC.

б) Точки B_1 и C_1 – середины высот BB' и CC' соответственно. Докажите, что треугольники $A'B_1C_1$ и ABC подобны.

5. На высотах AA', BB' и CC' треугольника ABC отмечены точки A_1, B_1 и C_1 так, что они делят высоты в отношении 2 : 1, считая от вершины. Докажите, что треугольник $A_1B_1C_1$ подобен треугольнику ABC.

6. В треугольнике ABC: I – центр вписанной окружности, I_a и I_b – центры вневписанных окружностей, касающихся сторон BC и AC соответственно. Докажите, что точки C, I и середины отрезков AI_a и Bi_b лежат на одной окружности.

7. Пусть A_1, B_1 и C_1 – точки описанной окружности треугольника ABC, диаметрально противоположные соответствующим вершинам, а точки A_2, B_2 и C_2 симметричны точкам A_1, B_1 и C_1 относительно сторон BC, AC и AB соответственно. Докажите, что описанная окружность треугольника $A_2B_2C_2$ содержит ортоцентр треугольника ABC.

8. а) Пусть H_A – проекция ортоцентра H треугольника ABC на медиану, проведенную к стороне BC. Докажите, что H_A лежит на окружности, описанной около треугольника BCH.
б) Пусть H – ортоцентр треугольника ABC, M – середина стороны BC, P – вторая точка пересечения окружности, описанной около ABC, с окружностью, построенной на отрезке AH как на диаметре. Докажите, что точки M, H и P лежат на одной прямой.
9. К двум окружностям, пересекающимся в точках A и B, проведена общая касательная, P и Q – точки касания H – ортоцентр треугольника PAQ. Докажите, что угол ABH – прямой.
10. Дан треугольник ABC. Точка A_0 лежит внутри угла BAC, а стороны AB и AC видны из нее под углами, дополняющими соответственно углы B и C треугольника до 180°. Точки B_0 и C_0 определяются аналогично. Докажите, что прямые AA_0, BB_0 и CC_0 пересекаются в одной точке, причем эта точка лежит на описанной окружности треугольника $A_0B_0C_0$.