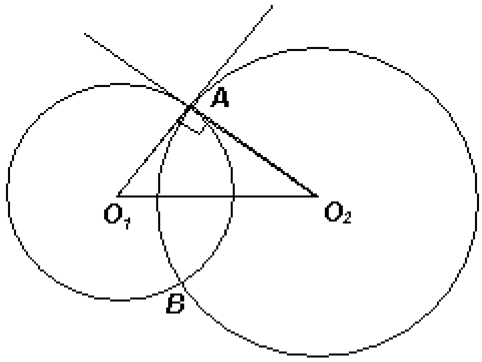
Ортогональные окружности

На этом занятии мы рассмотрим интересный частный случай взаимного расположения двух окружностей.



Определение. ***Две пересекающиеся окружности называются ортогональными, если касательные к ним в точке их пересечения – взаимно перпендикулярны*** (см. рисунок).

Эти окружности играют особую роль в ***инверсии***, которой некоторые из вас уже занимались.

Следствия из определения.

1) ***Угол между касательными не зависит от выбора точки пересечения***;

2) ***касательная к одной из ортогональных окружностей проходит через центр другой*** (то есть ***отрезок касательной к одной окружности является радиусом другой***);

3) ***две окружности ортогональны т. и т. т., когда их радиусы и расстояние d между центрами связаны соотношением:*** $d^2 = R^2 + r^2$.

4) ***две окружности ортогональны т. и т. т., когда их центры и точки пересечения лежат на одной окружности***.

Ортогональные окружности обладают еще рядом интересных геометрических свойств, которые. вы осмыслите при решении задач.

Упражнения и задачи для самостоятельного решения.

1. Докажите, что в прямоугольном треугольнике ABC с гипотенузой AB ортогональны окружности, описанные около треугольников: а) ACH и BCH, где H – основание высоты, опущенной на AB; б) ACD и BCD, где D – произвольная точка отрезка AB.

2. В треугольнике ABC проведены высоты AA_1, BB_1 и CC_1, H – ортоцентр треугольника. Окружность ω_1 проходит через точки A, B_1 и C_1, а окружность ω_2 проходит через точки B, C и B_1. а) Докажите, что окружности ω_1 и ω_2 ортогональны.

б) Используя доказанную ортогональность окружностей, докажите теорему об окружности девяти точек.

в) Используя доказанную ортогональность окружностей, докажите, что $AH^2 = 4R^2 - a^2$ (R – радиус окружности, описанной около треугольника ABC, $a = BC$).

3. Две ортогональные окружности ω_1 и ω_2 пересекаются в точках A и B. Точка H лежит на окружности ω_1 внутри окружности ω_2. Лучи AH и BH пересекают окружность ω_2 в точках C и D соответственно. Докажите, что: а) CD – диаметр окружности ω_2;

б) точка M пересечения прямых BC и AD лежит на окружности ω_1;

в) точка H – ортоцентр треугольника MCD;

г) центр O_1 окружности ω_1 лежит на высоте треугольника MCD.

4. Даны не концентрические окружности ω_1 и ω_2. Найдите геометрическое место центров окружностей ω, ортогональных каждой из данных окружностей. *(При ответе учтите различные возможности взаимного расположения двух данных окружностей*.)

5. В треугольнике ABC проведена высота AA_1. Точки B_1 и C_1 – основания перпендикуляров, опущенных из точки A_1 на стороны AB и AC соответственно. Докажите, что:

а) касательные к окружности, описанной около треугольника AB_1C_1, проведенные в точках B_1 и C_1, пересекаются на прямой, содержащей медиану AM треугольника ABC;

б) касательные к окружности, описанной около треугольника ABC, проведенные в точках B и C, пересекаются на прямой, симметричной AM относительно биссектрисы угла BAC.

6. Окружность, вписанная в треугольник ABC, касается сторон BC, CA и AB в точках A_1, B_1 и C_1 соответственно. На продолжении отрезка AA_1 за точку A выбрана точка D так, что AD

$= AC_1$. Прямые DB_1 и DC_1 вторично пересекают окружность в точках B_2 и C_2. Докажите, что B_2C_2 – диаметр окружности.

7. Даны три точки A, B и C, не лежащие на одной прямой.

а) Постройте окружность, касательные к которой, проведенные из данных точек, имеют длины a, b и c соответственно.

б) Через каждые две из трех данных точек проведите окружность так, чтобы построенные окружности были попарно ортогональны.

8. Дана окружность ω и точка P внутри нее, отличная от центра. Рассматриваются пары окружностей, касающиеся данной изнутри и друг друга в точке P. Найдите геометрическое место точек пересечения общих внешних касательных к этим окружностям.