Точка Микеля

1) Рассмотрим **четыре прямые, которые попарно пересекаются в точках A, B, C, D, E и F** (см. рис. 1). Тогда на чертеже образуются **четыре треугольника: ABC, ADE, CEF и BDF**. Докажем, что **описанные окружности этих треугольников имеют общую точку**.

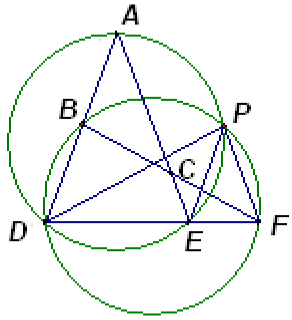


Рис. 1

Идея решения: рассмотрим сначала две окружности и докажем, что их точка пересечения принадлежит еще двум.

Доказательство. Пусть окружности, описанные около треугольников DAE и DBF пересекаются в точке P, отличной от D. Тогда $\angle ADP = \angle BFP$ (вписанные, опирающиеся на одну дугу). С другой стороны, $\angle ADP = \angle AEP$ (вписанные, опирающиеся на одну дугу). Следовательно, $\angle CEP = \angle CFP$, то есть, точки C, P, E и F лежат на одной окружности. Для точек C, P, B и A доказательство аналогично. Проделайте его самостоятельно.

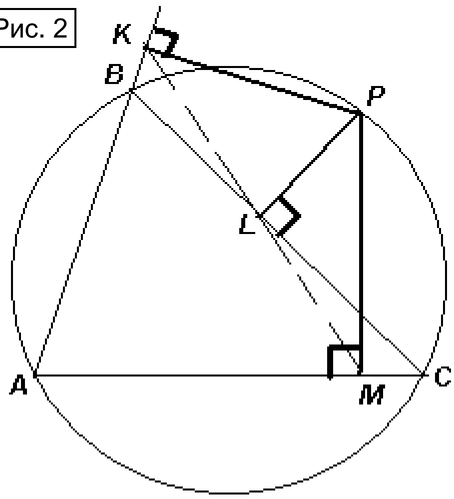
[$\angle PAC = \angle PBE = \angle PDF = \angle PBC$]

Полученная точка P называется точкой Микеля для прямых AD, AE, FB и FD.

2) Вспомним формулировку ***теоремы Симсона***.

Основания перпендикуляров, опущенных из точки, лежащей на описанной около треугольника окружности, на прямые, содержащие стороны, лежат на одной прямой.

Рис. 2



Мы ее доказывали, используя вписанные углы. Ее можно доказать с помощью точки Микеля, показав тем самым связь между этими фактами.

Доказательство. Пусть точки M, K и L – основания перпендикуляров, опущенных из точки P на прямые AC, AB и BC соответственно (см. рис. 2). Точка P лежит на описанных окружностях треугольников ABC и AKM, следовательно, она является точкой Микеля для прямых AC, AB, BC и MK. То есть, описанная окружность треугольника BKP проходит через точку пересечения прямых BC и MK. С другой стороны, эта окружность проходит через точку L, принадлежащую прямой BC. Следовательно, L и является точкой пересечения прямых BC и MK.

Задачи для самостоятельного решения.

1. Две равные окружности с центрами O_1 и O_2 пересекаются в точках M и K. Через точку K проведены две прямые, пересекающие первую окружность в точках A и B, а вторую – в точках C и D соответственно. Докажите, что: а) $AB = CD$; б) треугольники AMC и BMD – равнобедренные; в) $\Delta ABM = \Delta CDM$; г) $\angle AMC = \angle BMD = \angle O_1MO_2$; д) M – центр поворота, переводящего треугольник ABM в треугольник CDM, а одну окружность в другую; е) если окружности не равные, то треугольники ABM и CDM подобны, причем M – центр поворотной гомотетии переводящей один треугольник в другой, а одну окружность в другую.

2. Дан четырехугольник $ABCD$. Прямые AB и CD пересекаются в точке E, AD и BC – в точке F. M – точка Микеля для данных четырех прямых. Докажите, что: а) если $BE = DF$, то M – центр поворота, переводящего отрезок BE в FD; б) M – центр поворотной гомотетии, переводящей отрезок BE в FD (или DE в FB); в) в условии пункта а) точка M – середина дуги DE окружности, описанной около треугольника ADE; г) в условии пункта б) точка M такова, что $MD : ME = DF : BE$.

3. На стороне AB треугольника ABC выбирается точка E, а на луче BC (за точкой C) – точка F так, что $AE = CF$. Прямые AC и EF пересекаются в точке X. Для каждой пары точек E и F рассматривается треугольник AEX. Докажите, что описанные окружности таких треугольников имеют общую точку.

4. Четырёхугольник $ABCD$ – вписанный. Прямые AB и CD пересекаются в точке E, а прямые AD и BC – в точке F. Докажите, что точка Микеля для прямых, содержащих стороны четырёхугольника $ABCD$, лежит на отрезке EF.

5. Даны четыре попарно пересекающиеся прямые. Докажите, что ортогональные проекции их точки Микеля на эти прямые лежат на одной прямой.

6. а) Докажите утверждение, обратное теореме о прямой Симсона.

б) (*Обобщение прямой и обратной теорем о прямой Симсона*) Дан треугольник ABC. Из точки P проведены прямые PA_1, PB_1 и PC_1 под данным (ориентированным!) углом к прямым BC, CA и AB соответственно (точки A_1, B_1 и C_1 лежат на прямых BC, CA и AB). Докажите, что точки A_1, B_1 и C_1 лежат на одной прямой тогда и только тогда, когда P принадлежит описанной окружности треугольника ABC.

в) Точки A, B и C лежат на одной прямой, а точка P – вне этой прямой. Докажите, что центры описанных окружностей треугольников ABP, BCP, ACP и точка P лежат на одной окружности.

г) Четыре попарно пересекающиеся прямые образуют четыре треугольника. Докажите, что центры описанных окружностей этих треугольников лежат на одной окружности, проходящей через точку Микеля.

7. а) Две равные окружности пересекаются в точках A и B. Рассмотрим поворот вокруг точки A, переводящий первую окружность во вторую. Пусть C – произвольная точка первой окружности, C' – её образ при этом повороте. Докажите, что прямая CC' проходит через точку B.

б) (*прямая Штейнера*) Высоты треугольника ABC пересекаются в точке H; P – точка его описанной окружности. Докажите, что образы P_a, P_b и P_c точки P при симметрии относительно сторон треугольника лежат на одной прямой, проходящей через точку H.

в) Высоты треугольника ABC пересекаются в точке H; P – точка его описанной окружности. Докажите, что прямая Симсона точки P относительно треугольника ABC делит отрезок PH пополам.

8. Дан выпуклый четырёхугольник $ABCD$, стороны BC и AD которого равны, но не параллельны. Пусть E и F – такие внутренние точки отрезков BC и AD соответственно, что $BE = DF$. Прямые AC и BD пересекаются в точке P, прямые AC и EF пересекаются в точке R, прямые BD и EF пересекаются в точке Q. Рассмотрим треугольники PQR, получаемые для всех таких точек E и F. Докажите, что окружности, описанные около всех таких треугольников, имеют общую точку, отличную от P.