20.04.21

Задача №255

Использованы материалы занятий Д.В. Швецова и Ю.А. Блинкова.

Это занятие будет посвящено одной замечательной конструкции, которую многократно использовали авторы задач на различных олимпиадах. Основой этой конструкции является задача из учебника И.Ф. Шарыгина, имеющая номер 255, которую можно считать важной леммой.

Лемма. Пусть окружность, вписанная в треугольник ABC, касается сторон AB и BC в точках K и L соответственно, а биссектриса угла BAC пересекает отрезок KL в точке P. Докажите, что $\angle APC = 90°$.

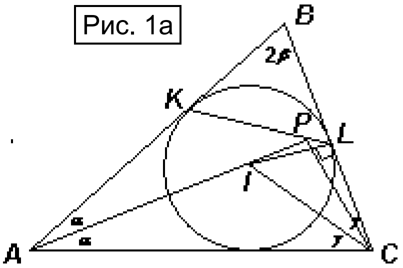

Рис. 1а

Доказательство. Первый способ. Пусть I – центр вписанной окружности, тогда $IL \perp BC$ (см. рис. 1а). Введем стандартные обозначения для углов треугольника: $\angle A = 2\alpha$; $\angle B = 2\beta$; $\angle C = 2\gamma$. Тогда $\angle BKL = 90° - \beta$; $\angle APK = 90° - \beta - \alpha = \gamma = \angle ICL$. Следовательно, четырехугольник $IPLC$ – вписанный, значит, $\angle APC = \angle IPC = \angle ILC = 90°$.

Это – классическое доказательство, но можно действовать и по-другому, используя ***прямую Симсона***!

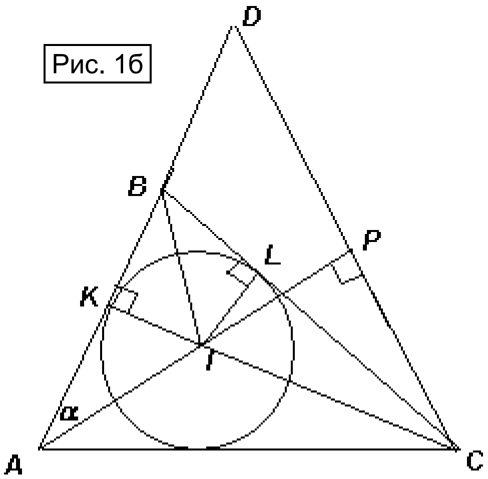

Рис. 1б

Второй способ. Будем считать, что P – основание перпендикуляра, опущенного из вершины C на биссектрису AI, тогда требуется доказать, что точки K, P и L лежат на одной прямой. Так как $IK \perp AB$ и $IL \perp BC$, то для этого достаточно доказать, что точка I лежит на окружности, описанной около треугольника BCD, где D – точка пересечения прямых AB и CP (см. рис. 1б).

Действительно, $\angle BDC = 90° - \angle DAI = 90° - \alpha$, а $\angle BIC = 90° + 0{,}5\angle BAC = 90° + \alpha$. Следовательно, $\angle BDC + \angle BIC = 180°$, что и требовалось.

Для того, чтобы вы убедились, что рассмотренная конструкция весьма популярна, в списке задач сохранены их источники.

Задачи для самостоятельного решения

1. (*ММО, 1994*) В треугольнике ABC опущены перпендикуляры BM и BN на биссектрисы углов A и C, а также перпендикуляры BP и BQ на внешние биссектрисы этих же углов. Докажите, что: а) точки M, N, P и Q лежат на одной прямой; б) длина отрезка PQ равна полупериметру треугольника ABC.

2. (*М. Евдокимов, ММО, 1999*) Вписанная окружность треугольника ABC касается сторон AB и BC ($AB > BC$) в точках N и M соответственно. PQ – средняя линия треугольника ABC, параллельная AB, K – точка пересечения MN и PQ. Докажите, что AK – биссектриса угла BAC.

3. (*Ф. Бахарев, С-Петербургская математическая олимпиада, 1999*) В неравнобедренном треугольнике ABC проведены биссектрисы AA_1 и CC_1 и отмечены точки K и L – середины сторон AB и BC соответственно. AP и CQ – перпендикуляры, опущенные на CC_1 и AA_1 соответственно. Докажите, что прямые PK и QL пересекаются на стороне AC.

4. (*В. Протасов, олимпиада по геометрии имени И.Ф. Шарыгина, 2009, заочный тур*) В треугольнике ABC опущены перпендикуляры BM и CN на биссектрисы углов C и B соответственно. Докажите, что прямая MN пересекает стороны AC и AB в точках их касания с вписанной окружностью.

5. (*Н. Агаханов, региональный этап ВОШ, 2013*) Окружность, вписанная в прямоугольный треугольник ABC с гипотенузой AB, касается его сторон BC, AC и AB в точках A_1, B_1 и C_1 соответственно. Пусть B_1H – высота треугольника $A_1B_1C_1$. Докажите, что точка H лежит на биссектрисе угла CAB.

6. (*С. Берлов, С-Петербургская математическая олимпиада, 2000*)

а) Вневписанная окружность треугольника ABC касается стороны AC в точке L, а продолжения стороны BC – в точке M. Прямая ML пересекает внешнюю биссектрису угла A в точке K. Докажите, что $AK \perp BK$.

б) Вневписанная окружность треугольника ABC касается его стороны BC в точке K, а продолжения стороны AB – в точке L. Другая вневписанная окружность касается продолжений сторон AB и BC в точках M и N соответственно. Прямые KL и MN пересекаются в точке X. Докажите, что CX – биссектриса угла ACN.

в) К двум окружностям проведены общая внешняя и общая внутренняя касательные. Докажите, что прямая, соединяющая две точки касания на первой окружности и прямая, соединяющая две точки касания на второй окружности, пересекаются на линии центров этих окружностей.

7. (*С. Берлов, С-Петербургская математическая олимпиада, 2000*)

Одна из вневписанных окружностей треугольника ABC касается стороны AB и продолжений сторон CA и CB в точках C_1, B_1 и A_1 соответственно, другая касается стороны AC и продолжений сторон BA и BC в точках B_2, C_2 и A_2 соответственно.

а) Прямые A_1B_1 и A_2B_2 пересекаются в точке P, а прямые A_1C_1 и A_2C_2 – в точке Q. Докажите, что прямая PQ проходит через вершину A.

б) Прямые A_1B_1 и A_2C_2 пересекаются в точке X, а прямые A_1C_1 и A_2B_2 – в точке Y. Докажите, что прямая XY проходит через вершину A.

в) Докажите, что отрезок AY равен радиусу вписанной окружности треугольника ABC.

8. (*XI Творческий конкурс учителей математики*) В треугольнике ABC выполняется равенство $3AC = AB + BC$. Вписанная в треугольник окружность касается сторон AB и BC в точках K и L соответственно; DK и EL – ее диаметры. Докажите, что точки пересечения прямых AE и CD с прямой KL равноудалены от середины отрезка AC.

9. (*Л. Емельянов, Задачник «Кванта», 1990*) Дан треугольник ABC. На продолжении стороны BC за точку C отмечена точка X. Окружности, вписанные в треугольники ABX и ACX, пересекаются в точках P и Q. Докажите, что все прямые PQ проходят через одну и ту же точку, не зависящую от выбора точки X.

10. Вписанная окружность треугольника ABC с центром I касается сторон BC и AC в точках D и E соответственно. Вневписанная окружность с центром I_a касается стороны BC и продолжения стороны AB в точках M и N соответственно. Докажите, что прямые DE и MN пересекаются на продолжении высоты AH.