Числа Каталана

Последовательность из знаков «(» и «)» длины $2n$ называется *правильной*, если выполнены два условия:
• в ней поровну символов «(» и «)»;
• на любом префиксе этой последовательности символов «(» не меньше чем «)».
Количество всевозможных правильных скобочных последовательностей длины $2n$ обозначается символом C_n и называется n-ым *числом Каталана*.

1. Докажите, что в правильной скобочной последовательности можно единственным способом разбить скобки на пары так, чтобы
• в любой паре были разные скобки и при этом скобка «(» стояла левее скобки «)»;
• две любые пары скобок не были «зацеплены». То есть запрещено такое: $\ldots (_1 \ldots (_2 \ldots)_1 \ldots)_2 \ldots$.

2. Найдите количество способов разбить целые числа от 1 до $2n$ на пары так, чтобы для любой четвёрки чисел $p < q < r < s$ в разбиение не могут одновременно входить пары
(а) $\{p, r\}$ и $\{q, s\}$; **(б)** $\{p, s\}$ и $\{q, r\}$.

3. **(а)** Частица вылетает из точки $(0, 0)$ и за одну секунду проходит либо единицу расстояния вправо, либо единицу вверх. Докажите, что количество способов добраться до точки (n, n), не поднимаясь строго выше прямой $y = x$, равно C_n.
(б) Докажите, что количество способов, которыми частица может добраться до точки (n, n), поднявшись выше прямой $y = x$, совпадает с количеством способов, которыми частица может добраться до точки $(n - 1, n + 1)$.
(в) Выведите явную формулу числа Каталана из предыдущего пункта.

4. Докажите, что числа Каталана определяются рекуррентным соотношением

$$C_{n+1} = C_0C_n + C_1C_{n-1} + C_2C_{n-2} + \ldots + C_nC_0 \text{ (при } n \geqslant 0), \; C_0 = 1.$$

5. Сколькими способами можно разрезать выпуклый n-угольник непересекающимися диагоналями на треугольники? Разрезания, отличающиеся поворотом, считаются различными.

6. *Упорядоченным корневым деревом* назовём дерево с выделенной вершиной, подвешенной за эту вершину, потомки каждой вершины которого пронумерованы.
(а) Найдите количество упорядоченных корневых деревьев с n вершинами.
(б) Найдите количество *бинарных* деревьев с n листьями — упорядоченных корневых деревьев, у каждой вершины которого 0 либо 2 потомка.