Алгебраический взгляд на ТЧ

1. Докажите, что для любых различных рациональных чисел a, b, c, число

$$\frac{1}{(b-c)^2}+\frac{1}{(c-a)^2}+\frac{1}{(a-b)^2}$$

является квадратом рационального числа.

2. Докажите, что произведение всех чисел вида

$$\pm\sqrt{1}\pm\sqrt{2}\pm\sqrt{3}\pm\ldots\pm\sqrt{2021}$$

является целым числом.

3. Докажите, что найдутся четыре таких целых числа a, b, c, d, по модулю больших 1000000, что $1/a+1/b+1/c+1/d=1/abcd$.

4. Докажите, что существуют натуральные числа a, b, c, d, большие 10^{2021}, такие, что

$$a^2+b^2+c^2+d^2=abc+abd+acd+bcd.$$

5. Натуральные числа a, b, c, d, e и f таковы, что число $S=a+b+c+d+e+f$ делит числа $abc+def$ и $ab+bc+ca-de-ef-fd$. Докажите, что число S составное.

6. Целые числа a, b и c таковы, что числа $a/b+b/c+c/a$ и $a/c+c/b+b/a$ тоже целые. Докажите, что $|a|=|b|=|c|$.

7. Докажите, что существуют такие натуральные a, b, c, большие 1, что

$$a \mid c^2-1,\quad b \mid a^2-1,\quad c \mid b^2-1$$

и $a+b+c>10^{2021}$.

8. **(а)** Пусть p — нечётное простое. Про целые числа a_1, a_2, ..., a_p известно, что $a_1^k+\ldots+a_p^k$ делится на p при любом натуральном k. Докажите, что все числа a_i попарно сравнимы по модулю p.

(б) Дано нечётное простое число p. ро целые числа a_1, a_2, ..., a_p известно, что $a_1^k+\ldots+a_p^k$ делится на p при $k=1, 2,\ldots, s$. При каком наименьшем s из этого следует, что числа a_1, ..., a_p дают либо одинаковые, либо попарно различные остатки при делении на p?