

Вариации

1. На отрезке AB отмечено $2n$ различных точек, симметричных относительно середины AB . При этом n из них покрашены в красный цвет, оставшиеся n — в синий. Докажите, что сумма расстояний от точки A до красных точек равна сумме расстояний от точки B до синих точек.
2. На плоскости даны 2021 точка общего положения: одна из них синяя, а остальные — красные. Рассмотрим все треугольники с вершинами в красных точках. Докажите, что синяя точка лежит в чётном числе из них.
3. На прямой отмечены $2n$ различных точек, при этом n из них покрашены в красный цвет, остальные n — в синий. Докажите, что сумма попарных расстояний между точками одного цвета не превосходит суммы попарных расстояний между точками разного цвета.
4. Имеется три кучи камней. Сизиф таскает по одному камню из кучи в кучу. За каждое перетаскивание он получает от Зевса количество монет, равное разности числа камней в куче, в которую он кладет камень, и числа камней в куче, из которой он берет камень (сам перетаскиваемый камень при этом не учитывается). Если указанная разность отрицательна, то Сизиф возвращает Зевсу соответствующую сумму. (Если Сизиф не может расплатиться, то великодушный Зевс позволяет ему совершать перетаскивание в долг.) В некоторый момент оказалось, что все камни лежат в тех же кучах, в которых лежали первоначально. Каков наибольший суммарный заработок Сизифа на этот момент?
5. В таблице $n \times m$ расставлены действительные числа так, что сумма чисел в каждом столбце и каждой строке целая. Докажите, что каждое число в таблице можно заменить на его верхнюю или нижнюю целую часть так, чтобы сумма чисел в каждом столбце и каждой строке не изменилась.
6. На плоскости проведено $n > 3$ прямых общего положения; каждая прямая окрашена либо в красный, либо в синий цвет, оба цвета встречаются. Эти прямые разбили плоскость на части. Докажите, что найдётся треугольник разбиения, стороны которого окрашены в оба цвета.
7. *Хромой ладья* назовём ладью, которая за один ход может сдвинуться только на одну клетку. Хромая ладья за 64 хода обошла все клетки шахматной доски и вернулась на исходную клетку. Докажите, что число её ходов по горизонтали не равно числу ходов по вертикали.