Алгебраические конструкции

1. Алфавит состоит из k букв, словом считается любая последовательность из n букв алфавита. Два слова похожи, если они различаются ровно в одной букве. В какое минимальное число цветов можно раскрасить все слова, так чтобы любые два похожих слова были разного цвета?

2. Математические кружки в Хамовниках посещают школьники 9, 10 и 11 классов, по n школьников в каждой параллели. После каждого занятия назначается тройка добровольцев (по одному из каждого класса) для наведения порядка в кабинетах (убирают недопитый чай, невыброшенные стаканчики, мусор неизвестного происхождения; также они расставляют по местам стулья в кабинете и в коридоре). Какое максимальное количество занятий может пройти так, чтобы никакая пара школьников не попадала два раза в тройку добровольцев?

3. В новом году в Хамовниках добавили дополнительную группу, которую также посещают n человек, и теперь отряд добровольцев состоит из четырёх школьников из разных групп. Как долго можно назначать добровольцев таким образом, чтобы никакая тройка школьников не попадала в добровольцы два раза?

4. В условия предыдущей задачи какое максимальное число дней можно назначать добровольцев так, чтобы никакая пара не была назначена в четвёрку два раза, если а) n нечётно; б) $n = 4$?

5. В королевстве живёт 2021 мудрец; один из них — визирь. Король заготовил для них испытание, которое будет проходить по следующим правилам. Все мудрецы (включая визиря) расставляются так, чтобы визирь видел всех остальных мудрецов, а остальные мудрецы видели только визиря. У каждого мудреца пишут на лбу натуральное число, не превосходящее 2, а у визиря — число, не превосходящее N. Каждый мудрец, не общаясь с остальными, тайно записывают на бумажку число — гипотезу о числе, написанное у него на лбу. Мудрецы, зная все эти правила, перед испытанием проводят совещание, на котором для каждого из мудрецов вырабатывается стратегия — какие числа он должен написать в зависимости от того, что он увидел. Для какого наибольшего N мудрецы могут выбрать, сколько человек пойдет на испытание, и придумать для них стратегию, при которой обязательно хотя бы у одного мудреца его список будет содержать число, записанное у него на лбу?

6. Квадрат разбивают на 4 равных квадрата. Затем один из получившихся квадратов тоже разбивают на 4 равных квадрата, один из (семи) имеющихся после этого квадратов разбивают на 4 равных квадрата и т.д. После конечного числа таких операций квадрат оказывается разбит на меньшие квадраты. Назовём два квадрата разбиения соседними, если сторона одного из них содержит сторону другого (возможно, совпадает с ней). Известно, что в получившемся разбиении стороны любых двух соседних квадратов отличаются в один или в два раза. В какое наименьшее количество цветов заведомо можно раскрасить все квадраты разбиения так, чтобы любые два соседних квадрата были разного цвета?

7. Пусть $n = 3^k$, докажите что все трехэлементные подмножества в $\{1, \dots, n\}$ можно разбить на $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ групп так, что любые два множества в одной группе не пересекаются.

8. Пусть $n = 2^k$, докажите что все трехэлементные подмножества в $\{1, \dots, n\}$ можно разбить на $\frac{(n-1)(n-2)}{6}$ групп так, что любые два множества в одной группе либо не пересекаются, либо имеют 2 общих элемента.