Отборочная олимпиада

1. Найти все составные n, чьи делители, отличные от 1 и n, лежат в промежутке $[n-20, n-12]$.

2. На столе лежит 30 кучек из спичек: по $100, 101, \ldots, 129$ спичек. Петя и Вася играют в игру, начинает Петя. Ход состоит в том, что можно либо взять одну спичку, либо объединить две непустые кучи, количества спичек в которых одной четности. Тот, кто не может сделать ход, проиграл. У кого из игроков есть выигрышная стратегия?

3. Вася расставил во всех клетках доски 99×99 числа от 1 до 99^2 по одному разу. Первым своим ходом Петя выбирает клетку доски и ставит на нее фишку. Дальше Петя хочет сделать как можно больше ходов так, чтобы число в клетке, на которую он поставит фишку, постоянно увеличивалось бы. За один ход Петя может передвинуть фишку в любую клетку квадрата 5×5 с центром в клетке, где сейчас стоит фишка (фишка должна при этом остаться в пределах доски). Какое наибольшее число ходов Петя заведомо сможет сделать, как бы Вася ни расставлял числа?

4. На сторонах AB, AC и BC правильного треугольника ABC выбраны точки X, Y и Z соответственно так, что $BZ = 2AY$ и $\angle XYZ = 90°$. Докажите, что $AX + CZ = XZ$.

5. У Димы есть 30 карточек, на каждой из которых написано вещественное число (числа не обязательно различны). Дима разбил карточки на пары и оказалось, что сумма чисел на карточках в каждой паре была равна 1. Затем Дима разбил карточки на пары другим способом и оказалось, в каждой паре, кроме одной, произведение чисел было равно 1. Докажите, что и в оставшейся паре произведение чисел равно 1.

6. Даны натуральные числа u и v. Оказалось, что для любого натурального k числа $ku + 2$ и $kv + 3$ не взаимно просты. Чему может быть равно $\frac{u}{v}$?