

Конечное и бесконечное

1. Верно ли, что в ряду натуральных чисел найдутся *сколь угодно много* подряд идущих составных чисел? А *бесконечно много* подряд идущих составных чисел?
2. Кузнечик стартует в точке 0 на числовой прямой. Он умеет прыгать на любую натуральную длину, не превосходящую 2020, в обе стороны.
(а) Может ли он побывать ровно по одному разу во всех целых точках от -12344512 до 12344512 ?
(б) Может ли он побывать ровно по одному разу во всех целых точках числовой прямой?
3. В *Волшебной-стране-где-не-нужно-работать* есть монеты нескольких номиналов (номиналов конечное число). Каждому новому гражданину даётся столько монет, сколько он пожелает (конечное число). Каждый день гражданин должен отдать государству одну монету, а взамен может получить сколько захочет монет (конечное число), но меньшего номинала, чем та, которую он отдал. (Взамен монеты наименьшего номинала не даётся ничего.) Докажите, что в Волшебной стране невозможно проживать бесконечно долго.
4. Каждое натуральное число покрасили в красный или синий цвет. Верно ли, что обязательно найдётся бесконечная арифметическая прогрессия, состоящая только из красных или только из синих чисел?
5. *Плоский угол* — это часть плоскости, ограниченная двумя сторонами угла. Дан (а) конечный набор плоских углов суммарной градусной меры 1° ; (б) бесконечный набор плоских углов, такой, что сумма градусных мер углов любого его конечного поднабора не превосходит 1° . Можно ли покрыть этим набором всю плоскость?
6. Аня называет любое число a . Затем Боря должен назвать такое натуральное число m , что сумма $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{m}$ больше, чем a . При любом ли числе a существует такое натуральное m ?
7. В *странный волшебный компьютер* нужно раз в минуту вводить одну цифру (от 0 до 9). При этом некоторые комбинации цифр (возможно, что их бесконечно много) выключают компьютер. Известно, что существуют сколь угодно длинные последовательности цифр, ввод которых не выключит компьютер. Докажите, что возможно так вводить цифры раз в минуту, что *странный волшебный компьютер* будет работать бесконечно долго.