Вас это не касается!

Сначала в треугольнике

В этом разделе листка используются следующие обозначения: ABC — произвольный треугольник (за исключением задачи 2), ω — его вписанная окружность, ω_a, ω_b, ω_c — вневписанные окружности, касающиеся сторон BC, CA и AB соответственно. Точки касания вписанной окружности ω со сторонами треугольника ABC обозначим через A_1, B_1 и C_1, а точки касания вневписанных окружностей со сторонами BC, CA и AB — через A_2, B_2 и C_2 соответственно.

1. Пусть $a = BC$ и p — полупериметр треугольника ABC.

(a) Докажите, что $AB_1 = p - a$.

(b) Докажите, что $BC_2 = p - a$.

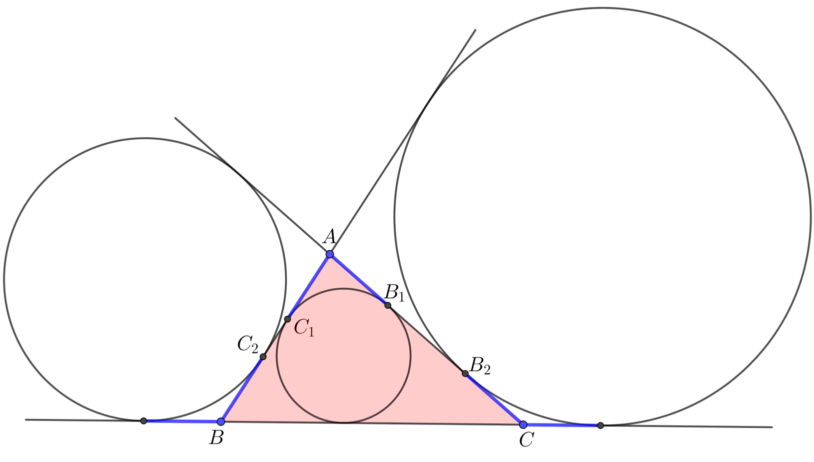

Рис. 1:

Полезная картинка: синие отрезки в треугольнике ABC равны. В частности, отсюда следует, что точки A_1 и A_2, B_1 и B_2, C_1 и C_2 симметричны относительно середин соответствующих сторон.

2. Пусть треугольник ABC — прямоугольный с прямым углом при вершине C, и $a = BC$, $b = CA$, $c = AB$ — его стороны.

(a) Вычислите радиусы вписанной и вневписанных окружностей ω, ω_a, ω_b, ω_c треугольника ABC.

(b) Пусть CH — высота треугольника ABC, опущенная на гипотенузу AB. Обозначим через L_1 и L_2 основания биссектрис углов $\angle ACH$ и $\angle BCH$. Докажите, что отрезок L_1L_2 равен диаметру вписанной окружности ω.

3. Докажите, что окружности, вписанные в треугольники AA_1B и AA_1C, касаются.

4. На стороне BC отмечена произвольная точка D. В треугольники ABD и ACD вписаны окружности. Докажите, что общая внутренняя касательная к этим окружностям, отличная от AD, проходит через фиксированную точку, не зависящую от положения точки D.

Потом в четырехугольнике

В задачах этой части листка $ABCD$ — это четырехугольник с непараллельными сторонами. Точка пересечения лучей AB и DC обозначена через P, а точка пересечения лучей BC и AD — через Q.

5. Докажите, что если в четырехугольник $ABCD$ можно вписать окружность, то

(a) $AB + CD = BC + AD$, **(b)** $PC + AQ = QC + AP$, **(c)** $PD + DQ = PB + BQ$.

6. Докажите обратные утверждения.

7. В четырехугольнике $ABCD$ провели диагональ AC. Докажите, что в четырехугольник $ABCD$ можно вписать окружность тогда и только тогда, когда окружности, вписанные в треугольники ABC и ADC, касаются.

8. Через точки P и Q проведены лучи, делящие четырехугольник $ABCD$ на девять маленьких четырехугольников. Выберем три из них, по одному в каждой строке и в каждом столбце. Докажите, что если эти четырехугольники описанные, то и четырехугольник $ABCD$ описанный (см. рис. 2).

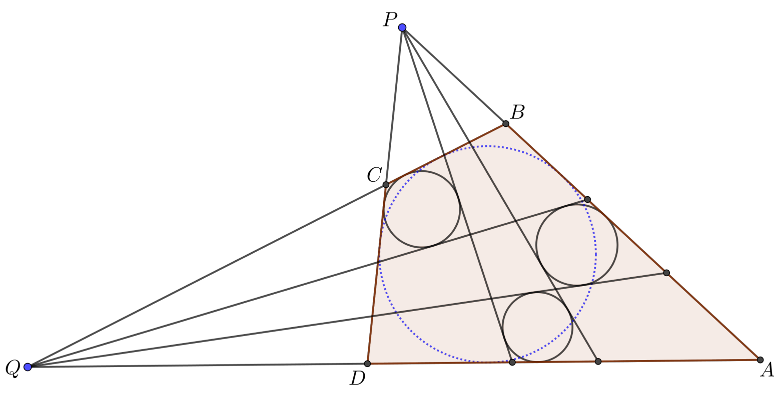

Рис. 2: