Формула включений-исключений

1. В группе 40 туристов. Из них 20 человек говорят по-английски, 15 — по-французски, 11 — по-испански. Английский и французский знают семь человек, английский и испанский — пятеро, французский и испанский — трое. Два туриста говорят на всех трёх языках. Сколько человек группы не знают ни одного из этих языков?

2. В кружок робототехники берут только тех, кто знает математику, физику или программирование. Известно, что 8 членов кружка знают физику, 7 — математику, 11 — программирование. При этом известно, что не менее двоих знают одновременно физику и математику, не менее троих — математику и программирование, и не менее четырёх — физику и программирование. Какое **(a)** наименьшее **(b)** наибольшее количество участников кружка может быть при этих условиях?

3. На столе площади 1 лежат три журнала, площади которых не меньше $\frac{1}{2}$. Петя подсчитал площадь пересечения первого и второго журнала, первого и третьего журнала, второго и третьего журнала, и сказал максимальное из этих трех чисел. Какое наименьшее число мог сказать Петя?

4. Куб со стороной 10 разбит на 1000 кубиков с ребром 1. В каждом кубике записано число, при этом сумма чисел в каждом столбике из 10 кубиков (в любом из трёх направлений) равна 0. В одном из кубиков (обозначим его через А) записана единица. Через кубик А проходит три слоя, параллельных граням куба (толщина каждого слоя равна 1). Найдите сумму всех чисел в кубиках, не лежащих в этих слоях.

Пусть A и B — два множества, $A \cup B$ и $A \cap B$ — объединение и пересечение множеств A и B соответственно, и $|A|$ — количество элементов в множестве A. Нетрудно понять, что верна следующая формула:

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|.$$

Эту формулу можно можно обобщить на случай трех множеств A, B и C:

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|.$$

Оказывается, что эти формулы обобщаются на случай произвольного n.

Пусть $A_1, A_2, \dots, A_n$ — произвольное семейство множеств. Введем обозначения:

$$S = |A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n|$$

$$S_1 = |A_1| + |A_2| + \dots + |A_n|$$

$$S_2 = |A_1 \cap A_2| + |A_1 \cap A_3| + \dots + |A_{n-1} \cap A_n|$$

...

$$S_n = |A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n|.$$

Формула включений-исключений утверждает, что $S = S_1 - S_2 + S_3 - \ldots + (-1)^{n+1} S_n$

5. **(a)** Докажите формулу включений-исключений в случае трех множеств. **(b)** Выпишите явно и докажите формулу включений-исключений в случае четырех множеств.

6. **(a)** Докажите, что для любого m выполнено $C_m^1 - C_m^2 + \ldots + (-1)^{m-1} C_m^m = 1$.
(b) Докажите формулу включений-исключений.

7. Петя и 9 других игроков играют в такую игру: каждый бросает игральную кость (шестигранную). Игрок получает приз, если он выбросил число очков, которое не удалось выбросить никому больше. Сколько существует исходов, в которых **(a)** Петя получит приз? **(b)** хоть кто-то получит приз?

8. **(a)** Докажите, что для любых n, i выполнено $C_n^i - C_n^{i+1} + \ldots + (-1)^{n+i} C_n^n \geqslant 0$
(b) Докажите, что $S_i - S_{i+1} + S_{i+2} - \ldots + (-1)^{i+n} S_n \geqslant 0$
(c) Докажите, что $S \geqslant S_1 - S_2 + \ldots - S_m$ для четных m, и $S \leqslant S_1 - S_2 + \ldots + S_m$ для нечетных m

9. Кафтан площадью 1 покрыт пятью заплатами площадью $\frac{2}{5}$ каждая. Докажите, что найдутся две заплаты, пересечение которых имеет площадь не меньше, чем $\frac{1}{10}$.