

Некруглые скобочки

Определение. Целая часть $[x]$ вещественного числа x — это наибольшее целое число, не превосходящее x . Например, $[8] = 8$, $[1.3] = 1$, $[-\frac{3}{4}] = -1$. Дробная часть $\{x\}$ числа x определяется формулой $\{x\} = x - [x]$.

Полезная мысль. Иногда полезно бывает посмотреть на то, как выражение выглядит без знака целой части.

1. (а) Докажите, что для любого действительного числа x выполняется тождество

$$[nx] = [x] + \left[x + \frac{1}{n}\right] + \left[x + \frac{2}{n}\right] + \dots + \left[x + \frac{n-1}{n}\right].$$

(б) Известно, что $[nx] = n[x]$ для любого натурального числа n . Докажите, что x — целое число.

2. Найдите сумму

$$\left[\frac{1}{3}\right] + \left[\frac{2}{3}\right] + \left[\frac{2^2}{3}\right] + \dots + \left[\frac{2^{2020}}{3}\right].$$

3. Сумма положительных чисел a , b и c равна 11. Докажите неравенства

(а) $[a]^4 + [b]^4 + [c]^4 \geq 243$;

(б) $a^{[a]} + b^{[b]} + c^{[c]} \geq 81$.

4. Существует ли такое вещественное число $a > 0$, для которого число $[50a] + [41a] + [9a]$ оканчивается на 98? (Через $[x]$ обозначается целая часть x , т.е., наибольшее целое число, не превосходящее x .)

5. Сумма дробных частей нескольких положительных чисел равна целой части их произведения. Докажите, что дробная часть суммы этих чисел равна произведению их целых частей.

6. Найдите все натуральные n , для которых число $\frac{n^2 + 1}{[\sqrt{n}]^2 + 2}$ целое.

Некруглые скобочки

Определение. Целая часть $[x]$ вещественного числа x — это наибольшее целое число, не превосходящее x . Например, $[8] = 8$, $[1.3] = 1$, $[-\frac{3}{4}] = -1$. Дробная часть $\{x\}$ числа x определяется формулой $\{x\} = x - [x]$.

Полезная мысль. Иногда полезно бывает посмотреть на то, как выражение выглядит без знака целой части.

1. (а) Докажите, что для любого действительного числа x выполняется тождество

$$[nx] = [x] + \left[x + \frac{1}{n}\right] + \left[x + \frac{2}{n}\right] + \dots + \left[x + \frac{n-1}{n}\right].$$

(б) Известно, что $[nx] = n[x]$ для любого натурального числа n . Докажите, что x — целое число.

2. Найдите сумму

$$\left[\frac{1}{3}\right] + \left[\frac{2}{3}\right] + \left[\frac{2^2}{3}\right] + \dots + \left[\frac{2^{2020}}{3}\right].$$

3. Сумма положительных чисел a , b и c равна 11. Докажите неравенства

(а) $[a]^4 + [b]^4 + [c]^4 \geq 243$;

(б) $a^{[a]} + b^{[b]} + c^{[c]} \geq 81$.

4. Существует ли такое вещественное число $a > 0$, для которого число $[50a] + [41a] + [9a]$ оканчивается на 98? (Через $[x]$ обозначается целая часть x , т.е., наибольшее целое число, не превосходящее x .)

5. Сумма дробных частей нескольких положительных чисел равна целой части их произведения. Докажите, что дробная часть суммы этих чисел равна произведению их целых частей.

6. Найдите все натуральные n , для которых число $\frac{n^2 + 1}{[\sqrt{n}]^2 + 2}$ целое.