Просто...

В этом листке мы поговорим о том, как доказывать бесконечность простых чисел, обладающих теми или иными свойствами. Оказывается, что во многих задачах подобного типа есть некоторая общая идеология, проследив которую, можно научиться решать даже очень трудные на первый взгляд примеры.

Теорема Евклида. Простых чисел бесконечно много.

Напомним, что ключевой идеей доказательства является рассмотрение следующего числа: $P = p_1 p_2 \dots p_n + 1$. Тогда его простой делитель отличается от всех p_i и потому является новым простым числом.

Несмотря на кажущуюся простоту доказательства этой теоремы, в ней есть несколько неочевидных соображений, которые полезно зафиксировать для дальнейших нужд.

- Простые числа являются более сложным объектом, нежели числа натуральные. В алгебраических (и не только) задачах полезно стартовать с самой сложной части условия: разобравшись с ней, скорее всего, удастся серьезно продвинуться и во всем решении. Поэтому в качестве стартового объекта полезно фиксировать *простые числа*, а не *натуральные*. Мы по *простому числу* строим *натуральное*, обладающее нужным нам свойством, а не ищем натуральное число, имеющее нужный нам простой делитель.
- Часто бесконечность какого-либо множества простых чисел полезно доказывать от противного, предполагая его конечность и строя новое простое число.
- Для построения нового простого числа полезно перемножать уже имеющиеся простые.

Держа в уме эти соображения, давайте попробуем справиться с остальными задачами.

1. Докажите, что существует бесконечно много простых чисел вида $4k-1$, где $k \in \mathbb{N}$.

2. **Теорема Шура.** Пусть $f(x)$ — многочлен степени $\geqslant 1$ с целыми коэффициентами, и P — множество простых делителей чисел вида $f(n)$, где $n \in \mathbb{N}$. Докажите, что множество P бесконечно, если
(a) свободный член многочлена $f(x)$ равен 1,
(b) $f(x)$ — произвольный.

3. Пусть $f(x)$ — многочлен с целыми коэффициентами, такой, что что $f(n) > 1$ для всех натуральных n, и пусть $p(n)$ — наибольший простой делитель числа $f(n)$. Докажите, что существует бесконечно много натуральных n, таких, что $p(n+1) > p(n)$.

4. Пусть $a > b \geqslant 1$ — натуральные числа и P — множество всех простых делителей чисел вида
(a) $a^n - 1$,
(b) $a^n - b^n$.
Докажите, что множество P бесконечно.

5. Пусть различные числа a и b, не делящиеся на простое $p > 2$, таковы, что $a + b \vdots p$. Пусть k – нечетное натуральное число. Докажите, что число

$$\frac{a^k + b^k}{a+b}$$

делится на p тогда и только тогда, когда k делится на p.

6. Пусть $a > b \geqslant 1$ — натуральные числа и P — множество всех простых делителей чисел вида $a^n + b^n$. Докажите, что множество P бесконечно.

Замечание. На самом деле верно гораздо более сильное утверждение: взяв *любую* новую степень, можно получить *новый простой делитель* числа $a^n + b^n$ (за исключением нескольких случаев, которые конкретно описываются), отличный от делителей всех чисел вида a^k+b^k при любом $k < n$. Соответствующее утверждение называется *теоремой Зигмонди*, и для доказательства нам потребуется довольно мощная техника. Поэтому мы вернемся к ней позднее. Классе в 10...