Немного монотонно...

В этом листке собраны задачи, связанные с идеями применения неравенств при работе с многочленами. Часто неравенства возникают в сочетании с *монотонностью*. Говорят, что функция f монотонно возрастает на некоторой области, если для любых двух чисел $x_1 < x_2$ из этой области верно неравенство $f(x_1) < f(x_2)$. Аналогично, функция f монотонно убывает, если для любых $x_1 < x_2$ верно $f(x_1) > f(x_2)$.

Полезный факт. При достаточно больших по модулю значениях аргумента многочлен становится монотонным. Поэтому бывает полезно работать именно с большими аргументами многочленов.

1. Многочлен $P(x)$ таков, что многочлены $P(P(x))$ и $P(P(P(x)))$ строго монотонны на всей вещественной оси. Докажите, что $P(x)$ тоже строго монотонен на всей вещественной оси.

2. Для двух приведенных многочленов $P(x)$ и $Q(x)$ выполнено равенство $P(P(x)) = Q(Q(x))$. Докажите, что эти многочлены совпадают.

3. Многочлен $P(x)$ таков, что уравнение $P(x) = x$ не имеет действительных корней. Докажите, что уравнение $P(P(x)) = x$ также не имеет действительных корней.

4. Дан многочлен $P(x)$ с действительными коэффициентами. Бесконечная последовательность различных натуральных чисел a_1, a_2, a_3, ...такова, что $P(a_1) = 0$, $P(a_2) = a_1$, $P(a_3) = a_2$, и т.д. Какую степень может иметь $P(x)$?

5. У многочлена четной степени $2n$ все коэффициенты лежат на отрезке $[3; 4]$. При каком при каком наименьшем n у него обязательно найдется вещественный корень?

6. Пусть $P(x)$ — квадратный трехчлен с неотрицательными коэффициентами, а a, b и c — длины сторон некоторого остроугольного треугольника. Докажите, что числа $\sqrt{P(a)}$, $\sqrt{P(b)}$ и $\sqrt{P(c)}$ также являются длинами сторон некоторого остроугольного треугольника.