Немного о многочленах

В этом листке мы работаем с многочленами от одной переменной с вещественными коэффициентами.

Теорема Безу. Остаток многочлена $f(x)$ при делении на $x-a$ равен $f(a)$.

Следствие 1. Если $f(a)=0$, то $f(x)=(x-a)g(x)$ для некоторого многочлена g.

Следствие 2. Многочлен степени n имеет не более n корней.

Следствие 3 (теорема Виета для кубического многочлена). Если $f(x)=x^3-px^2+qx-r$ — кубический многочлен с корнями a, b, c, то

$$p=a+b+c, \quad q=ab+bc+ca, \quad r=abc.$$

Полезная мысль. Первое, что тянет сделать, когда вы видите слово «многочлен» — это написать что-то в виде $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0$. В подавляющем большинстве случаев (хотя и не во всех) это *плохая идея*. Гораздо полезнее другой подход:

> *если вы видите многочлен, постарайтесь или найти его корни и сравнить количество корней и степень многочлена, или разложить многочлен на множители.*

Если в задаче априори нет многочлена, стоит попытаться его создать, переписав условие в терминах этого многочлена. В этом часто помогает теорема Виета.

1. Можно ли подобрать три действительных числа так, чтобы их сумма была равна числу $a\neq 0$, сумма попарных произведений была равна числу a^2, а произведение равно числу a^3?

2. Многочлен x^3+px^2+qx+r имеет на интервале $(0,2)$ три корня. Докажите, что $-2<p+q+r<0$.

3. Пусть f — квадратный трехчлен. Числа p, q, r выбраны так, что выполнены равенства

$$f(p)=q+r, \quad f(q)=r+p, \quad f(r)=p+q.$$

Докажите, что среди чисел p, q, r есть одинаковые.

4. Пусть P, Q и R — приведенные квадратные трехчлены и $p_{1,2}$, $q_{1,2}$, $r_{1,2}$ — их корни. Известно, что $p_1\neq p_2$, $q_1\neq q_2$, $r_1\neq r_2$ и

$$(P+Q)(r_1)=(P+Q)(r_2), \quad (Q+R)(p_1)=(Q+R)(p_2), \quad (R+P)(q_1)=(R+P)(q_2).$$

Докажите, что

$$p_1+p_2=q_1+q_2=r_1+r_2.$$

5. Вещественные числа a, b, c таковы, что $a + b + c > 0$, $ab + bc + ca > 0$ и $abc > 0$. Докажите, что числа a, b, c положительны.

6. Параболы, заданные уравнениями $y = x^2 - a$ и $x = y^2 - b$, пересекаются в четырех различных точках $P_i(x_i, y_i)$ (где $i = 1, ..., 4$). Вычислите значение выражения

$$(x_1 + x_2)(x_1 + x_3)(x_1 + x_4).$$

7. Множество, состоящее из миллиона последовательных натуральных чисел, назовем *необычным*, если его можно разбить на два подмножества, произведения элементов в которых равны. Конечно или бесконечно количество необычных множеств?

8. Натуральные числа a, b, c, d, e и f таковы, что число $S = a + b + c + d + e + f$ делит числа $abc + def$ и $ab + bc + ca - de - ef - fd$. Докажите, что число S составное.

9. Уравнение $x^4 - ax^3 + bx^2 - ax + d = 0$ имеет четыре различных вещественных корня x_i, причем все корни лежат на отрезке $[1/2, 2]$. Найдите наибольшее значение выражения

$$\frac{(x_1 + x_2)(x_1 + x_3)x_4}{(x_4 + x_2)(x_4 + x_3)x_1}.$$

10. Вещественные числа a, b, c, d, по модулю большие 1, таковы, что

$$a + b + c + d + abc + bcd + cda + abd = 0.$$

Докажите, что

$$\frac{1}{a-1} + \frac{1}{b-1} + \frac{1}{c-1} + \frac{1}{d-1} > 0.$$

11. Дан кубический многочлен $f(x)$. Назовем циклом такую тройку различных чисел (a, b, c), что

$$f(a) = b, \quad f(b) = c, \quad f(c) = a.$$

Известно, что нашлись восемь циклов (a_i, b_i, c_i), $i = 1, 2,..., 8$, в которых участвуют 24 различных числа. Докажите, что среди восьми чисел вида $a_i + b_i + c_i$ есть хотя бы три различных.