

Клетчатая комбинаторика

1. Клетки квадрата 9×9 окрашены в красный и синий цвета. Докажите, что найдется или клетка, у которой ровно два красных соседа по углу, или клетка, у которой ровно два синих соседа по углу (или и то, и другое).
2. Олег нарисовал пустую таблицу 50×50 и написал сверху от каждого столбца и слева от каждой строки по числу. Оказалось, что все 100 написанных чисел различны, причём 50 из них рациональные, а остальные 50 — иррациональные. Затем в каждую клетку таблицы он записал произведение чисел, написанных около её строки и её столбца. Какое наибольшее количество чисел в этой таблице могли оказаться рациональными числами?
3. На доске 300×300 расставлены ладьи, они бьют всю доску. Известно, что каждая ладья бьет не более чем одну другую ладью. При каком наименьшем k в каждом квадрате $k \times k$ обязательно стоит хотя бы одна ладья?
4. Коля и Дима играют в игру на доске 8×8 , делая ходы по очереди, начинает Дима. За свой ход Коля должен поставить один крестик в любую пустую клетку (т. е. в клетку, в которой еще не нарисован крестик и которая еще не покрыта доминошкой). Дима за свой ход должен накрыть доминошкой две соседних клетки (еще не накрытые другими доминошками), в которых суммарно четное число крестиков (0 или 2). Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто из игроков имеет выигрышную стратегию?
5. Из 54 одинаковых единичных картонных квадратов сделали незамкнутую цепочку, соединив их шарнирно вершинами. Любой квадрат (кроме крайних) соединен с соседями двумя противоположными вершинами. Можно ли этой цепочкой квадратов полностью закрыть поверхность куба $3 \times 3 \times 3$?
6. Дана клетчатая доска 1000×1000 . Фигура *гепард* из произвольной клетки x бьет все клетки квадрата 19×19 с центральной клеткой x , за исключением клеток, находящихся с x в одном столбце или одной строке. Какое наибольшее количество гепардов, не бьющих друг друга, можно расставить на доске?
7. Каждая грань куба $1000 \times 1000 \times 1000$ разбита на 1000^2 квадратных клеток со стороной 1. Какое наибольшее количество этих клеток можно закрасить так, чтобы никакие две закрасенные клетки не имели общей стороны?
8. Петя поставил на доску 50×50 несколько фишек, в каждую клетку — не больше одной. Докажите, что Вася может поставить на свободные поля этой же доски не более 99 новых фишек (возможно, ни одной) так, чтобы по-прежнему в каждой клетке стояло не больше одной фишки, и в каждой строке и каждом столбце этой доски оказалось четное количество фишек.