

Формула включения-исключения. Добавка

1. (a) Докажите тождество:

$$6xyz = (x + y + z)^3 - (x + y)^3 - (x + z)^3 - (y + z)^3 + x^3 + y^3 + z^3.$$

(b) Обобщите тождество на случай n переменных.

2. (a) На Новый год каждый из n сотрудников подготовил подарок и бросил его в мешок. Подарки перемешали, и каждый сотрудник вытянул один подарок. Сколько существует распределений подарков, в которых ни одному сотруднику не достался свой собственный подарок?

(b) На восьмое Марта каждый из m мальчиков подарил подарок одной из n девочек. Сколько существует распределений подарков, в котором ни одна девочка не осталось без подарка?

3. Введем функцию Мебиуса $\mu(n)$:

$$\mu(n) = \begin{cases} 1, & n \text{ является произведением четного количества различных простых чисел;} \\ 0, & n \text{ делится на квадрат простого числа;} \\ -1, & n \text{ является произведением нечетного количества различных простых чисел.} \end{cases}$$

(a) Петя выбрал натуральное $n > 1$ и просуммировал $\mu(d)$ по всем натуральным d , являющимися делителями числа n . Докажите, что у него получится 0.

(b) Обозначим через $\sigma(d)$ сумму делителей числа n . Петя выбрал n , для каждого делителя d он выписал на доску $\mu\left(\frac{n}{d}\right) \cdot \sigma(d)$, и нашел суммы выписанных чисел. Докажите, что у него снова получится n .