

Решётки

1. В вершинах некоторого квадрата сидит по одному кузнечику. Каждую минуту ровно один кузнечик перепрыгивает центрально-симметрично через какого-то другого.
(а) Докажите, что если кузнечики вновь оказались в вершинах изначального квадрата, то каждый вернулся именно на свою стартовую позицию.
(б) Могут ли кузнечики когда-нибудь оказаться в вершинах большего квадрата, чем изначальный? (Стороны большего квадрата не обязательно параллельны сторонам исходного).
2. На координатной плоскости отмечены узлы целочисленной решётки. В какое наименьшее число цветов можно раскрасить эти узлы так, чтобы расстояние между любыми двумя одноцветными узлами было не меньше $\sqrt{5}$?
3. На координатной плоскости расположена фигура площади строго больше 1. Докажите, что в ней можно отметить две различные точки так, их координаты отличались на целые числа и по оси x , и по оси y .
4. На плоскости расположено несколько одинаковых (а) квадратов; (б) правильных шестиугольников, соответственные стороны которых параллельны друг другу. Докажите, что в плоскость можно вбить несколько гвоздей так, чтобы каждая фигура была прибита ровно одним гвоздем.
5. Внутри правильного треугольника отмечена точка. Ее отразили несколько раз относительно сторон треугольника (в случайном порядке), и она опять попала внутрь треугольника. Докажите, что она вернулась на исходное место.
6. Существует ли на клетчатой плоскости замкнутая ломаная с нечётным числом звеньев одинаковой длины, все вершины которой лежат в узлах целочисленной решетки?