Взвешивания со сломанными весами

Во всех приведенных задачах дан набор монет, которые выглядят абсолютно идентично, но ровно одна монета из набора — фальшивая, а остальные — настоящие. Фальшивая монета легче настоящей, настоящие монеты выглядят одинаково.

Также дано несколько двухчашечных весов, среди которых могут быть сломанные. Результат сломанных весов не зависит от того, какие монеты лежат на чашах весов; сломанные весы могут показывать как правильный результат, так и неправильный.

1. Докажите, что тремя весами, из которых одни сломаны, можно
(a) из 3 монет найти фальшивую за 3 взвешивания,
(b) из 9 монет найти фальшивую за 4 взвешивания,
(c) из 81 монеты найти фальшивую за 7 взвешиваний.

2. Пусть известно, что l весами, среди которых k сломаны, можно найти фальшивую монету из любого количества монет за несколько взвешиваний. При каких парах (l, k) так может быть?

3. Докажите, что любым числом весов, среди которых есть сломанные, нельзя найти фальшивую монету из 3^k монет за $k+1$ взвешивание.

4. Докажите, что тремя весами, из которых одни сломаны, можно найти из
(a) 3^k монет фальшивую за $2k+1$ взвешивание,
(b) 3^{2k} монет фальшивую за $3k+1$ взвешивание.

5. **(a)** Докажите, что если можно найти фальшивую монету среди n монет за d взвешиваний, когда хотя бы одни весы сломаны, то $\frac{3^d}{2d+1} \geqslant n$. **(b)** Докажите, что во всех пунктах задачи 1 обойтись меньшим числом взвешиваний не получится.

6. За какое наименьшее число взвешиваний **(a)** шестью **(b)** четырьмя весами, среди которых одни сломаны, можно найти фальшивую монету среди 3^6 монет?