Плотности числовых последовательностей

1. Множество целых чисел разбито в объединение непересекающихся бесконечных в обе стороны арифметических прогрессий с разностями d_i. Пусть $S := \sum \frac{1}{d_i}$.

(a) Докажите, что если множество прогрессий конечно, то $S = 1$.

(b) Докажите, что если множество прогрессий бесконечно, то $S \leqslant 1$.

(c) Докажите, что существует такое разбиение на бесконечное число прогрессий, что $S < 1$.

2. Дана бесконечная возрастающая последовательность $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ натуральных чисел. Про эту последовательность известно, что существует такое вещественное число $\varepsilon > 0$, что в любом отрезке $\{1, 2, \dots, N\}$ содержится не меньше $N\varepsilon$ членов последовательности. Докажите, что можно выделить из последовательности бесконечную подпоследовательность чисел, ни одно из которых не делит другое.

3. Дан набор $a_1, a_2, \dots, a_k$ различных натуральных чисел, максимальное из которых равно N. Известно, что $\sum \frac{1}{a_i} \geqslant \frac{11}{10}$. Докажите, что среди чисел найдутся два, наименьшее общее кратное которых не превосходит $10N$.

4. Дано вещественное иррациональное число $\alpha > 1$. Кузнечик прыгает по числовой прямой, стартуя из точки 0, каждый раз перемещаясь на α вправо. Луч $[1, +\infty)$ разбит натуральными точками на единичные полуинтервалы вида $[n, n+1)$. Обозначим объединение всех полуинтервалов, в которых побывает кузнечик, через X_α.

(a) Предположим, что существует такое иррациональное $\beta > 1$, что $X_\alpha \cap X_\beta = \varnothing$ и $X_\alpha \cup X_\beta = [1, +\infty)$. Выразите β через α.

(b) Докажите, что для каждого иррационального $\alpha > 1$ существует такое иррациональное $\beta > 1$, что $X_\alpha \cap X_\beta = \varnothing$ и $X_\alpha \cup X_\beta = [1, +\infty)$.

(c) Существуют ли три иррациональных числа $\alpha, \beta, \gamma > 1$ таких, что $X_\alpha \cap X_\beta = \varnothing$, $X_\beta \cap X_\gamma = \varnothing$, $X_\gamma \cap X_\alpha = \varnothing$ и $X_\alpha \cup X_\beta \cup X_\gamma = [1, +\infty)$?