

Добрая ТЧ

1. Докажите, что сумма квадратов пяти последовательных целых чисел не может быть полным квадратом.
2. Через $S(n)$ обозначим сумму цифр числа n . Зададим последовательность следующим образом: $a_{n+1} = S(a_n)$, $a_0 = 2^{1000000}$. Найдите a_6 .
3. Дано натуральное число c и последовательность простых чисел $p_1, p_2, \dots, p_n, \dots$ такая, что $p_i + c$ делится на p_{i+1} . Докажите, что последовательность $\{p_n\}$ ограничена.
4. При каких целых k верно утверждение: число $(a^3 + b^3 + c^3 - kabc)$ делится на $a + b + c$ при любых целых a, b, c , сумма которых не равна 0?
5. Натуральные числа a, b, c таковы, что $a^{60} + b^{60} + c^{60}$ делится на 2015. Докажите, что каждое из чисел a, b, c также делится на 2015.
6. Докажите, что для любого многочлена с целыми коэффициентами $P(x)$ и любого натурального k , существует такое натуральное n , что $P(1) + P(2) + \dots + P(n)$ делится на k .
7. Пусть n – нечётное натуральное число, не делящееся на 3. Докажите, что $7^n - 6^n - 1$ делится на 43.
8. Существует ли такая последовательность натуральных чисел $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, что в ней каждое натуральное число встречается бесконечно много раз, и при этом для всех натуральных m последовательность $\{a_n \bmod m\}_{n=1}^{\infty}$ чисто периодична?