Планиметрический разнобой

1. В параллелограмме $ABCD$ угол $\angle A = 60°$. Из точки C провели касательные CX и CY к окружности (ABD) (здесь X и Y — точки касания). Докажите, что $\angle XCB = \angle YCD$.

2. В треугольнике ABC ($AB > BC$) проведены медиана BM и биссектриса BL. Прямая, проходящая через точку M параллельно прямой AB, пересекает отрезок BL в точке D, а прямая, проходящая через точку L параллельно прямой BC , пересекает отрезок BM в точке E. Докажите, что прямые ED и BL перпендикулярны.

3. Дан треугольник остроугольный неравнобедренный треугольник ABC. Рассматриваются всевозможные пары внешним образом касающихся окружностей β и γ со следующими свойствами:

- окружность β имеет центр на прямой AB и проходит через точку B;
- окружность γ имеет центр на прямой AC и проходит через точку C.

Окружность β вторично пересекают прямые BA, BC в точках X, P соответственно. Окружность γ вторично пересекают прямые CA, CB в точках Y, Q соответственно. Обозначим точку касания β и γ через T. Докажите, что каждая из четырёх прямых TX, TY, TP, TQ проходит через фиксированную точку, не зависящую от выбора окружностей β и γ.

4. Точка X вне треугольника ABC отмечена так, что точка A лежит внутри треугольника BXC и при этом $2\angle XBA = \angle ACB$ и $2\angle XCA = \angle ABC$. Докажите, что центры описанной и A-вневписанной окружностей треугольника ABC и точка X лежат на одной прямой.

5. Let M be the midpoint of the side BC of a acute triangle ABC. Incircle of the triangle ABM is tangent to the side AB at the point D. Incircle of the triangle ACM is tangent to the side AC at the point E. Let F be the such point, that the quadrilateral $DMEF$ is a parallelogram. Prove that F lies on the bisector of $\angle BAC$.

6. В неравнобедренный треугольник ABC вписана окружность ω с центром в точке I. Точка M — середина стороны BC. Перпендикуляр из точки A к прямой BC пересекает перпендикуляр из точки M к прямой AI в точке K. Докажите, что окружность, построенная на отрезке AK как на диаметре, касается окружности ω.

7. Биссектрисы углов при вершинах B и C треугольника ABC пересекают стороны AC и AB в точках E и F соответственно и пересекают окружность (ABC) в точках B_0 и C_0 соответственно. На прямой BC отмечены такие точки K и L (порядок точек на прямой BC таков: $K{-}B{-}C{-}L$), что $BA = BK$, $CA = CL$. Обозначим через P и Q центры окружностей (CLB_0) и (BKC_0) соответственно. Прямые BP и CQ пересекаются в точке Z. Докажите, что $AZ \perp EF$.