Симметрии сфер

1. Сфера вписана в многогранный угол. Докажите, что точки касания сферы со сторонами угла лежат на одной окружности.

2. В четырехгранный угол вписана сфера. Докажите, что суммы противоположных плоских углов этого четырехгранного угла равны.

3. Дана выпуклая четырехугольная пирамида с вершиной S и основанием $ABCD$, причём существует сфера, вписанная в эту пирамиду (то есть расположенная внутри пирамиды и касающаяся всех её граней). Пирамиду разрезали по рёбрам SA, SB, SC, SD и отогнули грани SAB, SBC, SCD, SDA вовне на плоскость $ABCD$ так, что получился многоугольник $AKBLCMDN$. Докажите, что точки K, L, M, N лежат на одной окружности.

4. В закрытой крышкой полусферической вазе лежат четыре одинаковых апельсина и грейпфрут. Апельсины касаются вазы, грейпфрут касается всех апельсинов. Верно ли, что точки касания грейпфрута с апельсинами лежат в одной плоскости?

5. В четырехугольную пирамиду $SABCD$, в основании которой лежит параллелограмм $ABCD$, можно вписать сферу. Докажите, что сумма площадей граней SAB и SCD равна сумме площадей граней SBC и SDA.

6. Вписанная сфера тетраэдра $SABC$ касается грани ABC в точке X, вневписанная сфера касается грани ABC в точке Y (и продолжений граней SAB, SBC, SCA). Докажите, что точки X и Y изогонально сопряжены относительно треугольника ABC (т. е. что $\angle BAX = \angle YAC$ и т. п.).

7. На ребрах SA, SB, SC тетраэдра $SABC$ отмечены точки A_1, B_1, C_1 так, что центр описанной сферы тетраэдра $SA_1B_1C_1$ равноудален от точек A, B, C. Точки A_2, B_2, C_2 симметричны точкам A_1, B_1, C_1 относительно середин ребер SA, SB, SC соответственно. Докажите, что существует сфера, проходящая через точки A_2, B_2, C_2, A, B, C.

8. (*Финал всероса-2019, задача 11.4*) Дана треугольная пирамида $ABCD$. Вневписанная сфера ω_A касается грани BCD и касается плоскостей остальных граней вне самих граней. Аналогично, вневписанная сфера ω_B касается грани CDA и касается плоскостей остальных граней вне самих граней. Пусть K — точка касания сферы ω_A с плоскостью ACD, а L — точка касания сферы ω_B с плоскостью BCD. На продолжениях отрезков AK и BL за точки K и L выбраны точки X и Y соответственно так, что $\angle CKD = \angle CXD + \angle CBD$ и $\angle CLD = \angle CYD + \angle CAD$. Докажите, что точки X и Y равноудалены от середины ребра CD.