

Геометрический взгляд на производную

Две функций f и g , определенные в некоторой окрестности точки x_0 , будем называть *эквивалентными* в точке x_0 , если $f(x_0) = g(x_0)$ и $\frac{f(x)-f(x_0)}{g(x)-g(x_0)} \rightarrow 1$ при $x \rightarrow x_0$.

Функция $f(x)$ эквивалентна в точке x_0 функции $f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$, если $\exists f'(x_0) \neq 0$.

1. Внутри окружности отмечена точка S . На окружности отмечена точка A . Луч с началом в точке S вращается вокруг точки S с угловой скоростью 1. В момент времени, когда луч пронзает точку A , вычислите **(а)** скорость, с которой луч заметает площадь круга; **(б)** скорость, с которой луч заметает длину окружности.

Все расстояния и углы на статичной картинке считаются известными.

2. (*Теорема о пицце*) Внутри круглой пиццы отметили произвольную точку. Через точку провели через неё 12 прямых, разбивающих плоскость на равные углы. Эти углы раскрашены в шахматном порядке в чёрный и в белый цвета. Докажите, что площадь чёрной пиццы равна площади белой.

3. **(а)** Внутри окружности отмечена точка T . Докажите, что на окружности существует такая функция плотности, что любая хорда через точку T отсекает половину массы всей окружности.

(б) Внутри большой окружности нарисована маленькая окружность. Докажите, что на большой окружности существует такая функция плотности, что любая касательная к маленькой окружности отсекает постоянную долю от массы всей большой окружности.

Из этой задачи непосредственно следует теорема Понселе.

4. В тёмной комнате 10×10 м бегают таракан со скоростью 0.1 м/с. Сможет ли Таня поймать таракана, если у неё есть фонарь, который освещает круг радиуса 1 м (с центром в Тане), а её скорость 1 м/с?

5. На плоскости нарисован эллипс. Для каждой точки X вне эллипса обозначим через $f(X)$ длину самой короткой нити, натянутой на эллипс и точку X . Докажите, что локусом точек X с условием $f(X) = \text{const}$ служит эллипс, софокусный с исходным.

6. Для данного выпуклого пятиугольника $ABCDE$ рассмотрим такую точку X , для которой достигается минимум величины $AX + BX + CX + DX + EX$. Предположим, что точка X лежит строго внутри. Докажите, что сумма пяти единичных векторов, направленных от точки X к вершинам пятиугольника, равна нулевому вектору.

Какой функции вида $Ax + By + C$ эквивалентна функция $\sqrt{x^2 + y^2}$ в точке (x_0, y_0) ?

7. На проволочную единичную окружность паук натянул паутину. Паутина представляет из себя плоский граф с прямыми рёбрами в круге, ограниченном данной окружностью; из вершин графа, лежащих на окружности, ребро выходит внутрь окружности перпендикулярно ей; а в каждой вершине графа внутри круга сумма единичных исходящих векторов вдоль рёбер графа нулевая. Докажите, что длина паутины равна количеству её вершин на окружности.

Геометрический взгляд на производную

Две функций f и g , определенные в некоторой окрестности точки x_0 , будем называть *эквивалентными* в точке x_0 , если $f(x_0) = g(x_0)$ и $\frac{f(x)-f(x_0)}{g(x)-g(x_0)} \rightarrow 1$ при $x \rightarrow x_0$.

Функция $f(x)$ эквивалентна в точке x_0 функции $f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$, если $\exists f'(x_0) \neq 0$.

1. Внутри окружности отмечена точка S . На окружности отмечена точка A . Луч с началом в точке S вращается вокруг точки S с угловой скоростью 1. В момент времени, когда луч пронзает точку A , вычислите **(а)** скорость, с которой луч заметает площадь круга; **(б)** скорость, с которой луч заметает длину окружности.

Все расстояния и углы на статичной картинке считаются известными.

2. (*Теорема о пицце*) Внутри круглой пиццы отметили произвольную точку. Через точку провели через неё 12 прямых, разбивающих плоскость на равные углы. Эти углы раскрашены в шахматном порядке в чёрный и в белый цвета. Докажите, что площадь чёрной пиццы равна площади белой.

3. **(а)** Внутри окружности отмечена точка T . Докажите, что на окружности существует такая функция плотности, что любая хорда через точку T отсекает половину массы всей окружности.

(б) Внутри большой окружности нарисована маленькая окружность. Докажите, что на большой окружности существует такая функция плотности, что любая касательная к маленькой окружности отсекает постоянную долю от массы всей большой окружности.

Из этой задачи непосредственно следует теорема Понселе.

4. В тёмной комнате 10×10 м бегают таракан со скоростью 0.1 м/с. Сможет ли Таня поймать таракана, если у неё есть фонарь, который освещает круг радиуса 1 м (с центром в Тане), а её скорость 1 м/с?

5. На плоскости нарисован эллипс. Для каждой точки X вне эллипса обозначим через $f(X)$ длину самой короткой нити, натянутой на эллипс и точку X . Докажите, что локусом точек X с условием $f(X) = \text{const}$ служит эллипс, софокусный с исходным.

6. Для данного выпуклого пятиугольника $ABCDE$ рассмотрим такую точку X , для которой достигается минимум величины $AX + BX + CX + DX + EX$. Предположим, что точка X лежит строго внутри. Докажите, что сумма пяти единичных векторов, направленных от точки X к вершинам пятиугольника, равна нулевому вектору.

Какой функции вида $Ax + By + C$ эквивалентна функция $\sqrt{x^2 + y^2}$ в точке (x_0, y_0) ?

7. На проволочную единичную окружность паук натянул паутину. Паутина представляет из себя плоский граф с прямыми рёбрами в круге, ограниченном данной окружностью; из вершин графа, лежащих на окружности, ребро выходит внутрь окружности перпендикулярно ей; а в каждой вершине графа внутри круга сумма единичных исходящих векторов вдоль рёбер графа нулевая. Докажите, что длина паутины равна количеству её вершин на окружности.