Комбинаторный разнобой

1. Даша едет на машине из деревни в город, проезжая по трём дорогам. При этом по каждой из этих дорог она едет с постоянной скоростью. Возможно ли, что треть пути по расстоянию была пройдена раньше, чем треть пути по времени, половина пути по расстоянию была пройдена позже, чем половина пути по времени, и две трети пути по расстоянию — раньше, чем две трети пути по времени?

2. Клетки прямоугольника 5×41 раскрашены в два цвета. Докажите, что можно выбрать три строки и три столбца так, чтобы все девять клеток, находящихся на их пересечении, будут иметь один цвет.

3. В Пиквикском клубе состояло 100 джентльменов. Мистер Пиквик подсчитал, сколько друзей имеет каждый из оставшихся 99 джентльменов среди этих 99 и записал полученные 99 чисел на карточку в некотором порядке. Аналогичные карточки составили и остальные джентльмены. Все 100 карточек сохранились в архиве до наших дней. Докажите, что можно составить сто первую карточку, на которой написано 100 чисел — количества друзей у каждого из джентльменов.

4. На прямой дано 50 отрезков. Докажите, что либо некоторые 8 отрезков имеют общую точку, либо найдётся 8 отрезков, никакие два из которых не имеют общей точки.

5. Два сумасшедших геометра по очереди отмечают точки на плоскости, причём после каждого хода любые три отмеченные точки должны образовывать треугольник площадью не меньше 1 и не больше 1000. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто из геометров имеет выигрышную стратегию (и имеет ли её хоть кто-то из них)?

6. Среди пяти внешне одинаковых монет три настоящие и две фальшивые. Настоящие монеты одинаковые по весу и фальшивые монеты тоже одинаковые по весу. Вес фальшивой отличается от веса настоящей, но неизвестно, в большую или в меньшую сторону. За какое наименьшее число взвешиваний можно найти хотя бы одну настоящую монету?

7. В каждой клетке квадратной таблицы $m \times m$ клеток стоит целое неотрицательное число. При этом, если на пересечении строки и столбца стоит ноль, то сумма чисел в «кресте», состоящем из этой строки и этого столбца, не меньше m. Докажите, что сумма всех чисел в таблице не меньше, чем $m^2/2$.

8. В N-элементном множестве выделены 100 подмножеств. Все они чётны (т. е. состоят из чётного числа элементов), их всевозможные пересечения — по 2, по 3, ..., по 99 — тоже чётны, а пересечение всех 100 подмножеств нечётно. При каком наименьшем N такое возможно?

[ЦПМ, кружок по математике] Юргин Г.

[*2020-2021*] группа: 11 класс *1 марта 2021 г.*

Комбинаторный разнобой

1. Даша едет на машине из деревни в город, проезжая по трём дорогам. При этом по каждой из этих дорог она едет с постоянной скоростью. Возможно ли, что треть пути по расстоянию была пройдена раньше, чем треть пути по времени, половина пути по расстоянию была пройдена позже, чем половина пути по времени, и две трети пути по расстоянию — раньше, чем две трети пути по времени?

2. Клетки прямоугольника 5×41 раскрашены в два цвета. Докажите, что можно выбрать три строки и три столбца так, чтобы все девять клеток, находящихся на их пересечении, будут иметь один цвет.

3. В Пиквикском клубе состояло 100 джентльменов. Мистер Пиквик подсчитал, сколько друзей имеет каждый из оставшихся 99 джентльменов среди этих 99 и записал полученные 99 чисел на карточку в некотором порядке. Аналогичные карточки составили и остальные джентльмены. Все 100 карточек сохранились в архиве до наших дней. Докажите, что можно составить сто первую карточку, на которой написано 100 чисел — количества друзей у каждого из джентльменов.

4. На прямой дано 50 отрезков. Докажите, что либо некоторые 8 отрезков имеют общую точку, либо найдётся 8 отрезков, никакие два из которых не имеют общей точки.

5. Два сумасшедших геометра по очереди отмечают точки на плоскости, причём после каждого хода любые три отмеченные точки должны образовывать треугольник площадью не меньше 1 и не больше 1000. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто из геометров имеет выигрышную стратегию (и имеет ли её хоть кто-то из них)?

6. Среди пяти внешне одинаковых монет три настоящие и две фальшивые. Настоящие монеты одинаковые по весу и фальшивые монеты тоже одинаковые по весу. Вес фальшивой отличается от веса настоящей, но неизвестно, в большую или в меньшую сторону. За какое наименьшее число взвешиваний можно найти хотя бы одну настоящую монету?

7. В каждой клетке квадратной таблицы $m \times m$ клеток стоит целое неотрицательное число. При этом, если на пересечении строки и столбца стоит ноль, то сумма чисел в «кресте», состоящем из этой строки и этого столбца, не меньше m. Докажите, что сумма всех чисел в таблице не меньше, чем $m^2/2$.

8. В N-элементном множестве выделены 100 подмножеств. Все они чётны (т. е. состоят из чётного числа элементов), их всевозможные пересечения — по 2, по 3, ..., по 99 — тоже чётны, а пересечение всех 100 подмножеств нечётно. При каком наименьшем N такое возможно?